ӘОЖ 372.851

«ОРТА МЕКТЕПТЕ ИНТЕГРАЛДЫ ОҚЫТУДЫҢ ТЕОРИЯЛЫҚ ЖӘНЕ ӘДІСТЕМЕЛІК НЕГІЗДЕРІ»

Иманғалиев Думан Гималайұлы, Амандосов Ербол, Беркінқызы Ақторғын

Х.Досмұхамедов атындағы Атырау университетінің «7М01503-Математика. Білім беру үрдісін басқару» мамандығының магистранттары,

Сайдолқызы Жұмагүл

Магистр, аға оқытушы. Х.Досмұхамедов атындағы Атырау университеті

Ғылыми жетекшісі, тех.ғ.докторы, профессор – Кенжегулов Б. З.

Атырау қ, Қазақстан Республикасы

Қазақстан Республикасының жалпы білім беретін мектептеріндегі оқу процесін ұйымдастыру мәселесі қозғалғанда орта мектептегі жаратылыстану бағытындағы пәндер, соның ішінде математика пәніне айрықша көңіл бөлініп, оқу жүктемесі де көбірек бөлінеді. Өйткені математикалық дайындықтың басты бағыты - оқушылардың алған теориялық білімдерін практика жүзінде қолдана алу дағдыларын қалыптастыру қажеттілігі туындайды. Заманауи білім беру бағытында математикалық аппаратты тек есептеу құралы ретінде ғана емес, нақты қолданбалы есептерді шығарудың тиімді әдісі ретінде меңгеру қажет. Мақалада математиканың интегралдық есептеулер бөлімі бойынша оқушылардың функционалдық сауаттылығын көтеруге және олардың математика пәніне деген қызығушылығын интегралдау әдісі арқылы арттыру көзделіп отыр. Математика пәнінің мазмұнын математика ғылымының тілі, физикалық құбылыстарды модельдеудің құралы ретінде оқушылардың көзін жеткізу керек. Білім алушылардың базалық математикалық білімін көтеру бағытында пәнаралық байланыстарды енгізіп, оқушыларды мәтінді есептерді шығаруға ынталандыру өте қажет.

Мектептегі интеграл ұғымы алгебра және анализ бастамалары курсынан басталып, Жоғары оқу орнындағы (ЖОО) жоғары математика сабағында жалғасып, жаратылыстану пәнінің заңдылықтары мен табиғат құбылыстарын сипаттағанда үлкен қызмет атқарады. Оқушылар интеграл туралы алған білімімен геометриялық фигуралардың, физикалық құблыстардың, химиялық және биологиялық реакциялардың, географиялық табиғат өзгерістерінің шамаларын анықтайды. Сондықтан ғылыми тұрғыда кездесетін қолданбалы есептерді интегралдар арқылы шығару әдістемесін жетілдіру - білім алушылардың зерттеушілік қабілеттерін дамытудың негізгі шарты болып табылады. Орта мектеп бағдарламасының оқыту үдерісінде интегралдың қолданбалы бағыты мен оларды шешу жолындағы инновациялық әдістері арасындағы белгілі бір заңдылықтарды оқушыларға түсінікті етіп жеткізген дұрыс. Оқу барысында интеграл ұғымы кестелік формула арқылы абстрактілі деңгейінде қаралады да, білім алушылар интегралдың тәжірибелік құндылығын толық сезіне алмайды. Сол себепті, интеграл ұғымы мен оны қолданбалы есептерді шешу жолында жаңа алгоритмдер жасау және заманауи техникалық мүмкіндіктерді пайдалану арқылы бұл мәселені оқушыларға түсіндіру - бүгінгі әдістемелік ғылымның **өзекті** мәселелернің бірі. Математикалық білім берудегі интеграл ұғымы, интегралдық есептеулер мен оның рөлі, маңызы туралы айтқанда алғашқы функция және анықталмаған интеграл мәселесі қозғалады. Ал бұлар дифференциалдық есептеуде мәселе берілген функцияның туындысын немесе дифференциалын (алғашқы функция) табу және олардың көмегімен функциялардың өзгеруін зерттеу болды. Интегралдық есептеуде мәселе керісінше қойылады: берілген туындысы немесе дифференциалы бойынша функцияның өзін табу. Яғни, интегралдау және дифференциалдау бір-біріне кері амалдар болып табылады. Туындысы берілсе немесе дифференциалы бойынша функцияның өзін табу мәселесі орта мектеп математикасының бағдарламасында үлкен орын алатын бөлім.

Берілген функцияларды интегралдау деген сөз – қолданыстағы әдістерді пайдаланып, берілген интегралдарды кестелік, алмастыру, бөліктеу әдістерінің біреуіне келтіріп, алғашқы функциясын табу деген сөз. Итегралданатын функция таңбасындағы аргумент пен интеграл астынағы дифференциал таңбасындағы аргумент бірдей болуына көңіл аудару керек. Мектеп оқу құралындағы кестелік интегралдарды қалай пайдалану керектігі жөнінде келесі мысалдарды қарастырайық [1-3].

Мысал есеп 1. Интегралды табыңыз:

$$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\sin x}}.$$

Шығарылуы: Бұл интегралды бірден есептеуге келмейді. Дифференциал белгісіндегі аргумент пен функция аргументін бірдей түрге келтірген жөн. Мұндағы $cosxdx$ өрнегі бөлімдегі $2+\ \sin x$ функциясының дифференциалы болып табылады. Олай болса,

$$\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{2+\sin x}} = \int \frac{d(2+\sin x)}{\sqrt{2+\sin x}}$$

Интегралдар кестесіндегі келесі формуланы қолдансақ ,

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C \ \ (u > 0),$$

онда $$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\sin x}} = \int \frac{d(2+\sin x)}{\sqrt{2+\sin x}} = 2\sqrt{2+\sin x} + C$$

интеграл анықталмаған болғандықтан С кез-келген тұрақты сан.

Мысал есеп 2. Интегралды табыңыз:

$$\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3\sqrt{1-x^2}},$$

Шығарылуы: бұл интегралдың астындағы $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ өрнек, $\arcsin x$-тің дифференциалы болып табылады. Онда интегралдар кестесіндегі сәйкес формуланы қолдансақ,

$$\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{d(\arcsin x)}{(\arcsin x)^3} = -\frac{1}{2(\arcsin x)^2} + C.$$

интеграл анықталмаған болғандықтан С кез-келген тұрақты сан.

Мысал есеп 3. Интегралды табыңыз:

$$\int \frac{\sin 2x\, dx}{2sin^2x + 3}.$$

Шығарылуы: Мұнда интеграл таңбасы астында тұрған бөлшектің алымы $\sin 2x\, dx$ келесі өрнектің, яғни

$$\frac{1}{2}d(2sin^2x + 3)$$

функциясының дифференциалы болып табылады.

Онда берілген интегралды келесідей жазуға болады.

$$\int \frac{\sin 2x\,dx}{2sin^2x+3} = \frac{1}{2}\int \frac{d(sin^2x+3)}{2sin^2x+3} = \frac{1}{2}\ln(2sin^2x+3)+C.$$

Мұндағы С кез-келген тұрақты сан.

Келесі есептер ұлттық бірыңғай тестілеуде келген.

Мысал есеп 4. Интегралды табыңыз:

$$\int (\frac{x^2+2x+3}{x+2})\,dx$$

Шығарылуы: егер интеграл астындағы функция бірден кестелік интеграл болмаса, онда жеңіл түрлендірулер арқылы интеграл астындағы функцияны қосылғыштарға бөліктеу арқылы шығаруға тура келеді.

$$\int \left(\frac{x^2+2x}{x+2}+\frac{3}{x+2}\right)dx = \int x+\frac{3}{x+2}dx = \int xdx + 3\int \frac{1}{x+2}dx = \frac{x^2}{2}+3\ln|x+2|+C$$

Мұндағы С кез-келген тұрақты сан.

Мысал есеп 5. Интегралды табыңыз:

$$\int (\cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right))\,dx$$

Шығарылуы: Интеграл астындағы функцияны

$$cos2a = cos^2a - sin^2a$$

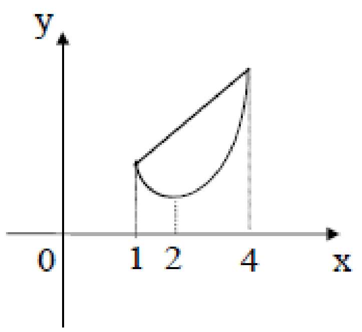
осы формуланың көмегімен түрлендіріп аламыз

$$\int \left(\cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)dx = \int cos2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)d\left(x+\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$=\frac{1}{2}\int cos2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)d2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}sin2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+C$$

Мұндағы С кез-келген тұрақты сан.

Келесі қаралатын мәселе, орта мектепте интегралдың көмегімен қолданбалы есептерді шешу арқылы оқушылардың функционалдық сауаттылығын қалыптастыру.



Мысал есеп 6. Берілгені: Келесі қарастыратын есебіміз $y = x^2 - 4x + 5$ және $y = x + 1$ сызықтармен шектелген фигураның ауданын табу.

Шығарыруы: Анықталған интеграл арқылы есептеу үшін біз бірнеше маңызды қадамды орындауымыз керек. Алдымен қиылысу нүктелерін табу шарт, яғни интегралдау шектерін (төменгі a және жоғарғы b мәндерін) анықтау үшін екі функцияны бір-біріне теңестіреміз:

$$x^2 - 4x + 5 = x + 1$$

Теңдеуді нөлге келтіреміз:

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

Виет теоремасы немесе дискриминант арқылы түбірлерін табамыз:

$x_1 = 1; x_2 = 4$

Демек, біздің фигура x=1 және x=4 аралығында орналасқан. Қай сызықтың жоғарыда, қайсысының төменде орналасқанын анықтау маңызды. Ол үшін [1; 4] аралығынан кез келген нүктені (мысалы, x=2) алып, функцияларға қойып көреміз: Түзу үшін: y = 2 + 1 = 3, парабола үшін: $y = 2^2 - 4(2) + 5 = 4 - 8 + 5 = 1$. Бұл аралықта түзу y = x + 1 параболадан жоғары орналасқан.

Екі қисықпен шектелген фигураның ауданы жоғарғы функциядан төменгі функцияны азайтып, интегралдау арқылы табылады:

$$S = \int_a^b \big(f_1(x) - f_2(x)\big)\, dx$$

Біздің жағдайда:

$$S = \int_1^4 \big((x+1) - (x^2 - 4x + 5)\big)\, dx$$

$$S = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4)\, dx$$

Енді инградлдың мәнін есептеу үшін алғашқы функцияны тауып, Ньютон-Лейбниц формуласын қолданамыз:

$$S = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x\right]_1^4$$

Жоғарғы шекті, x=4 қоямыз:

$$F(4) = -\frac{64}{3} + \frac{5 \cdot 16}{2} - 4 \cdot 4 = -\frac{64}{3} + 40 - 16 = -\frac{64}{3} + 24 = \frac{-64 + 72}{3} = \frac{8}{3}$$

Төменгі шекті, x=1 қоямыз:

$$F(1) = -\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 4 = \frac{-2 + 15 - 24}{6} = -\frac{11}{6}$$

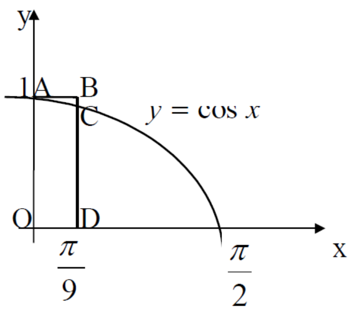
Айырмасын есептейміз:

$$S = \frac{8}{3} - \left(-\frac{11}{6}\right) = \frac{16}{6} + \frac{11}{6} = \frac{27}{6} = 4.5$$

Жауабы: Фигураның ауданы 4.5 квадрат бірлікке тең.

Мысал есеп 7. Берілгені: $sin20° < \frac{7}{20}$ теңсіздігін дәлелдеу есебін қарастырайық.

Шығарылуы: Бұл теңсіздікті дәлелдеу үшін біз $y = cos\, x$ функциясының графигін және оның $\left[0, \frac{\pi}{9}\right]$ аралығындағы қисықтың ауданын қарастырамыз. Ньютон-Лейбниц формуласы бойынша кез келген a бұрышы үшін келесі теңдік орындалады:



$$\int_0^a \cos x\ dx = \sin x \Big|_0^a = \sin a - \sin 0 = \sin a$$

Біздің жағдайда $a = 20° = \frac{\pi}{9}$ радиан. Демек, $\sin 20°$ мәні — $y = \cos x$ функциясының 0 мен $\frac{\pi}{9}$ аралығындағы графигімен шектелген фигураның ауданына тең.

$y = \cos x$ функциясы $\left[0, \frac{\pi}{9}\right]$ аралығында келесі сипатқа ие: $x = 0$ болғанда, функция ең үлкен мәніне ие: $\cos(0) = 1$. Аралық өскен сайын (x > 0), функция мәні кеми бастайды ($\cos x < 1$).

Интегралдың монотондылық қасиеті бойынша, егер [a, b] аралығында f(x) < g(x) болса, онда олардың интегралдары да сәйкес теңсіздікті қанағаттандырады. Графиктен көріп тұрғанымыздай, $\left(0, \frac{\pi}{9}\right]$ аралығында әрқашан $\cos x < 1$ орындалады. Олай болса, осы функциялардың интегралдарын салыстырамыз:

$$\int_0^{\frac{\pi}{9}} \cos x\ dx < \int_0^{\frac{\pi}{9}} 1\ dx$$

Сол жақ бөлік бізге $\sin 20°$ береді(S_{OACD}), ал оң жақ бөлік қабырғалары 1 және $\frac{\pi}{9}$ болатын тіктөртбұрыштың (S_{OABD}) ауданын береді:

$$\sin 20° < x\Big|_0^{\frac{\pi}{9}}$$

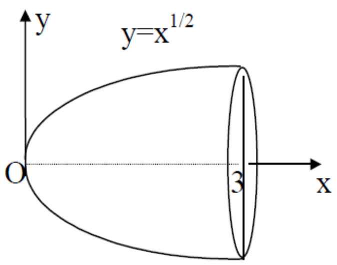
$$\sin 20° < \frac{\pi}{9}$$

Осылайша, интеграл астындағы ауданды (қисық трапеция) оны сырттай сызылған тіктөртбұрыш ауданымен салыстыру арқылы біз мына тізбекті аламыз:

$$\sin 20° < S_{OABD} = \frac{\pi}{9} < \frac{7}{20}$$

Дәлелдеу керегі осы еді.

Мысал есеп 8. Берілгені: $y = \sqrt{x}$, y = 0 (Ox осі) және x = 3 сызықтармен шектелген фигураны айналдыру арқылы пайда болған дененің көлемін табу қажет. Шығарылуы: Бұл есепті шығару үшін біз анықталған интегралдың көмегімен айналу денесінің көлемін табу формуласын қолданамыз. Алдымен, берілген сызықтар қандай фигураны шектеп тұрғанын көру үшін кескінін саламыз.



$y = \sqrt{x}$ — бұл тармағы оң жаққа бағытталған параболаның жоғарғы бөлігі.

$y = 0$ — бұл Ox осі (төменгі шегі (шекара)).

$x = 3$ — бұл 3 нүктесі арқылы өтетін тік сызық (оң жақ шегі (шекара)).

Осы сызықтармен шектелген жазық фигура Ox осінің бойымен айналғанда, біз «кесе» тәрізді айналу денесін аламыз.

Айналу денесінің көлемін табу формуласын қарастырамыз. Егер қисық сызықты трапеция Ox осінен айналатын болса, оның көлемі келесі формуламен есептеледі:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Мұндағы:

$f(x) = \sqrt{x}$ — біздің функциямыз.

$a = 0$ — интегралдаудың төменгі шегі (кескін x=0 нүктесінен басталады).

b = 3 — интегралдаудың жоғарғы шегі (есеп шарты бойынша x=3).

Енді формулаға мәндерді қойып, интегралды есептейміз:

Функцияның квадратын табамыз:

$$[f(x)]^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$$

Интегралды жазамыз:

$$V = \pi \int_0^3 x \, dx$$

Алғашқы функцияны табамыз: x функциясының алғашқы функциясы $\frac{x^2}{2}$ болады.

$$V = \pi \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3$$

Ньютон-Лейбниц формуласы бойынша шектерді қоямыз:

$$V = \pi \cdot \left(\frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right)$$

$$V = \pi \cdot \left(\frac{9}{2} - 0\right)$$

$$V = 4{,}5\pi$$

Жауабы: Берілген сызықтармен шектелген фигура Ox осінен айналғанда пайда болатын дененің көлемі 4,5π (немесе шамамен 14,14) куб бірлікке тең.

Интегралды қолданып қолданбалы есептерді шешудегі инновациялық тәсілдер күнделікті өмірде ғылымның, жаратылыстану бағытындағы әр түрлі салаларында маңызды рөл атқарады. Мақалада қазіргі оқу процесі аясындағы интеграл ұғымына терең талдау жасалып, оқушылардың математикалық сауаттылығын қалыптастырудағы және аналитикалық ойлауын дамытудағы маңыздылығын айқындау жолында бірнеше мысал есептер шығарылды. Берілген есептердің барлығынында практикалық маңыздылығы зор. Мұндай қолданбалы есептер оқушылардың математикаға деген ынтасы мен белсенділігін оятады.

Қолданылған әдебиеттер тізімі:

1. Ә.Н. Шыныбеков, Д.Ә. Шыныбеков, Р.Н. Жұмабаев. Алгебра жене анализ бастамалары: Жалпы білім беретін мектептін 11-сыныбына арналан оқулық, 2 бөлімді - Алматы: Ата-мұра, 2020. — 144 бет.
2. Утепкалиев С.У.,Шаждекеева Н.К., Жанузакова З.Ж. Математика. Оқу құралы. - Атырау: «Атырау-Акпарат» ЖШС, 2017 жыл, 431 бет
3. Жәутіков О.А. Математикалық анализ курсы. Оқулық/ Жәутіков О.А. Екінші басылым; Қазақстан Республикасы Жоғары оқу орындарының қауымдастығы. – Алматы: «Экономик» баспасы, 2014. – 832 бет.
4. Эрентраут Е.Н. «Прикладные задачи математического анализа для школьников»: Учебное пособие. - Челябинск: Изд-во ЧГПУ, 2004. – 119 с.