ӘОЖ 517.38

«МЕКТЕП БАҒДАРЛАМАСЫНА СӘЙКЕС ИНТЕГРАЛ ТАҚЫРЫБЫНА БЕРІЛГЕН ЕСЕПТЕРДІҢ ШЕШУ ӘДІСТЕРІ»

Амандосов Ербол Асқарұлы, Иманғалиев Думан Гималайұлы, Беркінқызы Ақторғын
yerbol.amandossov@gmail.com
dumanimangaliev04@gmail.com
berkinkyzyaktorgyn5@gmail.com
«7М01503 – Математика. Білім беру үрдісін басқару» мамандығының 2 курс магистранттары
Халел Досмұхамедов атындағы Атырау университеті, Атырау қ, Қазақстан Республикасы

Сайдолқызы Жұмагүл
saydolkyzy@mail.ru
Магистр, аға оқытушы.
Халел Досмұхамедов атындағы Атырау университеті, Атырау қ, Қазақстан Республикасы
Ғылыми жетекшісі, Техника ғылымдарының докторы, профессор – Кенжегулов Бекет
kenzegulov_bz@mail.ru
Халел Досмұхамедов атындағы Атырау университеті
Қазақстан Республикасы, Атырау қаласы

Мектеп бағдарламасына сәйкес интеграл тақырыбына берілген есептерді шығару үшін оқушыларға туынды мен алғашқы образ ұғымдарының өзара байланысын терең түсіндірген дұрыс. Оқулықтағы көрсеткішті функция және тағы басқа әртүрлі өрнектермен берілген интегралдарды шешу үшін интегралдау әдістері мен ережелерін сауатты қолдана білген жөн. Оқушылар алғашқы образдың мағынасын түсінгеннен кейін интеграл ұғымын да тез қабылдайды. Интеграл ұғымын қолданып көптеген геометриялық, физикалық есептердің алгоритмдердің көрнекілікпен қабылдауға болады. Бұл кезде интегралдау әрекеті, дифференциалдауға кері амал болғандықтан келесі тәсілдерді қолдануға болады: а) ізделінді функцияның туындысын сәйкес аргумент бойынша жазу; б) туынды, яғни алғашқы функция табылған функцияны жазу; в) сәйкес аргумент мәнінде ізделінді функция өзгерісін, яғни интегралды жазу. Осыдан кейін геометриялық, физикалық шамаға интеграл көмегімен сөзбен анықтама беру. Интеграл ұғымын, оның түрлі басқа ұғымдармен өзара байланысын түсіну арқылы оны түпкілікті ұғуға болады. Геометриялық, физикалық есептерді түсіндіру барысында «туынды», «алғашқы образ», «интеграл» ұғымдарын толық қарастырғанда ғана оқушыларда олардың өзара байланысы туралы ұғым толықтырылады, оларды тек дербес жағдайларда ғана емес, жалпы қарастыруға да мүмкіншілік туады. Мақалада алғашқы функция, анықталмаған интеграл және олардың қазіргі оқу процесі аясында күрделі есептерді шешу мәселесіне терең талдау жасалып, оның шығару жолдарын айтарлықтай жеңілдететін мысал есептер келтірілген. Шыққан есептерге талдау жасалып, оқушылардың математикалық дағдыларын қалыптастырудағы және аналитикалық ойлауын дамытуға әсер ететін күрделі есептерді шығару жолдары ұсынылды. Білім алушыларға интеграл тақырыбы арқылы жаратылыстану бағытындағы, табиғаттағы құбылыстарды шешу жолы – интеграл ұғымын оқытудағы сабақтастықтың қазіргі заманғы тенденциялары екендігін түсіндіру ұсынылды [1-2].

Интеграл ұғымы – ғасырлар бойы ғылымның, техниканың және практикалық қосымшалардың дамуына елеулі үлес қосқан математиканың іргелі, әрі қызықты бөлімдерінің бірі. Кейде білім алушыларға интеграл ұғымы күрделі және түсініксіз болып көрінуі де мүмкін. Алайда, мақаланың мақсаты – күрделі материалды айқындықпен, қол жетімділікпен түсіндіру, яғни әр білім алушыға түсінікті ету.

Алдымен көрсеткішті және логарифмдік функциялаға тоқталып, сосын жалпы өрнектермен берілген есептердің интегралдарын табу жолдарына тоқталайық [3].

Мысал есеп 1: Берілгені. Анықталмаған интегралды есептеу қажет:

$$\int 4^{2-3x} dx$$

Шығарылуы. Бұл есепті шығару үшін математикадағы негізгі әдістердің бірі, атап айтқанда, айнымалыны алмастыру (немесе дифференциал белгісінің астына енгізу) әдісін және көрсеткіштік функцияны интегралдаудың кестелік формулаларын қолданамыз.

Есептеу барысында бізге келесі негізгі формулалар мен ережелер қажет болады:

Көрсеткіштік функцияның интегралы:

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

мұндағы a — тұрақты сан ($a > 0, a \neq 1$), ал C — кез келген тұрақты шама.

Әрі қарай интеграл айнымалысын алмастыру әдісін пайдаланамыз. Егер интеграл астындағы функцияның аргументі күрделі болса (біздің жағдайда $2 - 3x$), оны қарапайым айнымалыға келтіру үшін жаңа белгілеу енгіземіз.

Күрделі функцияның туындысын табу ережесі бойынша формуланы пайдаланамыз: $\left(a^{f(x)}\right)' = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$.

Интеграл астындағы 4^{2-3x} функциясында дәреже көрсеткіші сызықтық функция түрінде берілген. Интегралды кестелік түрге келтіру үшін, осы дәрежедегі өрнекті жаңа u айнымалысы ретінде қабылдаймыз:

$$u = 2 - 3x$$

Біз айнымалыны x-тен u-ға ауыстырғандықтан, dx дифференциалын да du арқылы өрнектеуіміз керек. Ол үшін жоғарыдағы теңдіктің екі жағынан да туынды (дифференциал) аламыз:

$$du = (2 - 3x)' dx$$

Тұрақты санның (2) туындысы 0-ге тең, ал $-3x$ өрнегінің туындысы -3-ке тең. Олай болса:

$$du = -3\,dx$$

Осы жерден бізге қажетті dx мәнін бөліп аламыз:

$$dx = -\frac{1}{3} du$$

Енді тапқан мәндерімізді бастапқы интегралға қойып, оны u айнымалысына байланысты қайта жазамыз:

$$\int 4^{2-3x} dx = \int 4^u \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) du$$

Интегралдың сызықтық қасиеті бойынша, тұрақты көбейткішті ($-\frac{1}{3}$) интеграл таңбасының алдына шығаруға болады:

$$-\frac{1}{3} \int 4^u du$$

Енді біздің өрнегіміз көрсеткіштік функцияның стандартты интегралына айналды. Жоғарыда аталған формуланы қолданамыз ($a = 4$):

$$-\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4^u}{\ln 4}\right) + C$$

Бөлшектерді көбейтіп, ықшамдасақ:

$$-\frac{4^u}{3\ln 4}+C$$

Есептің соңғы жауабы бастапқы x айнымалысымен берілуі тиіс. Сондықтан u орнына оның бастапқы мәнін $(2-3x)$ қайта қоямыз:

$$\int 4^{2-3x}dx=-\frac{4^{2-3x}}{3\ln 4}+C.$$

Нәтиженің дұрыстығын туынды арқылы дәлелдеу үшін туындысын табамыз. Табылған алғашқы функцияның (F(x)) туындысы интеграл астындағы функцияға $(f(x))$ тең болуы керек. Көрсеткіштік функцияның туындысы келесі формуламен есептеледі:

$$(a^x)'=a^x\cdot\ln a$$

Бірақ біздің жағдайда дәрежеде жай ғана x емес, $2-3x$ функциясы тұрғандықтан, біз күрделі функцияның туындысын табу (тізбекті ереже) формуласын қолданамыз: $(a^u)'=a^u\cdot\ln a\cdot u'$. Тексеріп көрейік:

$$F(x)=-\frac{1}{3\ln 4}\cdot 4^{2-3x}+C$$

Туындысын есептейміз:

$$F'(x)=\left(-\frac{1}{3\ln 4}\cdot 4^{2-3x}+C\right)'$$

Тұрақты санның (C) туындысы нөлге тең. Тұрақты көбейткішті $-\frac{1}{3\ln 4}$ туынды таңбасының алдында қалдырып, 4^{2-3x} күрделі функциясынан туынды аламыз:

$$F'(x)=-\frac{1}{3\ln 4}\cdot(4^{2-3x}\cdot\ln 4\cdot(2-3x)')$$

Өрнекті әрі қарай есептейміз:

$$F'(x)=-\frac{1}{3\ln 4}\cdot 4^{2-3x}\cdot\ln 4\cdot(-3)$$

Енді қысқартуларды орындаймыз:

Бөлімдегі $\ln 4$ пен алымдағы $\ln 4$ қысқарады.

Алдындағы «минус» таңбасы мен жақша ішіндегі -3 санының «минусы» көбейтіліп, «плюс» болады.

Бөлімдегі 3 пен алымдағы 3 саны қысқарады.

Нәтижесінде:

$$F'(x)=4^{2-3x}$$

Біз бастапқы интеграл астындағы функцияны алдық. Бұл есептің толықтай дұрыс шығарылғанын дәлелдейді.

Жауабы:

$$\int 4^{2-3x}dx=-\frac{4^{2-3x}}{3\ln 4}+C.$$

мұндағы C тұрақты шама.

Мысал есеп 2. Берілгені: интегралды есептеу керек.

$$\int\frac{a^x dx}{1+a^{2x}}$$

Шешуі: Бұл тапсырмада бізге айнымалыны алмастыру әдісін қолдана отырып, көрсеткіштік функциясы бар бөлшек өрнектің анықталмаған интегралын есептеу қажет.

Есептеуді бастамас бұрын, бізге қажет болатын математикалық заңдылықтар мен қолданылатын негізгі формулаларды анықтап алайық:

Көрсеткіштік функцияның туындысы:

$$(a^x)'=a^x\ln a$$

Бұл формула дифференциал белгісінің астына енгізу немесе алмастыру кезінде дифференциалды табу үшін қолданылады.

Арктангенс функциясына әкелетін интеграл:

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \arctan(u) + C$$

Мұндағы u — айнымалы, ал C — интегралдау тұрақтысы.

Күрделі функцияның туындысын табу ережесі:

$$\left(f\big(g(x)\big)\right)' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

Нәтижені тексеру кезінде бізге арктангенс пен көрсеткіштік функцияның бірігуінен жасалған күрделі құрылымнан туынды алу қажет болады.

Интегралдың бөліміндегі a^{2x} мүшесін дәреженің қасиеті бойынша $(a^x)^2$ түрінде жазуға болады. Осылайша, интеграл келесі түрге келеді:

$$\int \frac{a^x}{1+(a^x)^2} dx$$

Бұл жерде алымдағы a^x пен бөлімдегі $(a^x)^2$ арасындағы байланысты көруге болады. Егер біз a^x функциясын жаңа айнымалы ретінде алсақ, оның туындысы алымдағы өрнекке ұқсас болады. Сондықтан келесі алмастыруды енгіземіз:

$$u = a^x$$

Енді жаңа айнымалы u бойынша du дифференциалын табамыз. Ол үшін таңдалған a^x функциясынан туынды аламыз:

$$du = (a^x)'dx = a^x \ln a \cdot dx$$

Біздің бастапқы интегралымыздың алымында тек $a^x dx$ көбейтіндісі тұр. Сондықтан жоғарыдағы теңдіктен осы бөлікті бөліп аламыз:

$$a^x dx = \frac{1}{\ln a} du$$

Мұндағы $\ln a$ — тұрақты шама екені белгілі.

Тапқан мәндерімізді бастапқы интегралға қойып, x айнымалысынан толықтай u айнымалысына көшеміз:

$$\int \frac{a^x dx}{1+a^{2x}} = \int \frac{1}{1+u^2} \cdot \left(\frac{1}{\ln a}\right) du$$

Сызықтық қасиет бойынша $\frac{1}{\ln a}$ тұрақтысын интеграл таңбасының алдына шығарамыз:

$$\frac{1}{\ln a} \int \frac{du}{1+u^2}$$

Жоғарыда аталған кестелік формулаға сәйкес, бұл интеграл арктангенс функциясын береді:

$$\frac{1}{\ln a} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\ln a} \cdot \arctan(u) + C$$

u айнымалысының орнына оның бастапқы мәнін (a^x) қайта қоямыз;

$$\int \frac{a^x dx}{1+a^{2x}} = \frac{\arctan(a^x)}{\ln a} + C$$

Дәлелдеу: Қолданылатын туынды формулалары:

$$(\arctan u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'; \qquad (a^x)' = a^x \ln a$$

Тексеру: $F'(x) = \left(\frac{1}{\ln a} \arctan(a^x) + C\right)'$

Тұрақты көбейткішті $(\frac{1}{\ln a})$ сақтай отырып, күрделі функцияның туындысын есептейміз:

$$F'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{1+(a^x)^2} \cdot (a^x)'$$

Көрсеткіштік функцияның туындысын өз орнына қоямыз:

$$F'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{1+a^{2x}} \cdot (a^x \cdot \ln a)$$

Бұл жерде алымдағы $\ln a$ мен бөлімдегі $\ln a$ тұрақтылары бір-бірімен қысқарып кетеді:

$$F'(x) = \frac{a^x}{1 + a^{2x}}$$

Біз бастапқы интеграл астындағы функцияны алдық. Демек, интеграл толықтай дұрыс есептелген.

Жауабы:

$$\int \frac{a^x dx}{1 + a^{2x}} = \frac{\arctan(a^x)}{\ln a} + C.$$

Мұндағы C тұрақты шама.

Мысал есеп 3. Берілгені: интегралды есептеу қажет

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1 - x^4}}$$

Бұл тапсырмада бізге айнымалыны алмастыру әдісін қолданып, арксинус функциясына келтірілетін анықталмаған интегралды есептеу қажет.

Есептеуді бастамас бұрын, бізге қажет болатын негізгі математикалық заңдылықтар мен кестелік формулаларды атап өтейік:

Арксинус функциясына әкелетін интеграл:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \arcsin(u) + C$$

Мұндағы u — айнымалы, ал C — интегралдау тұрақтысы. 2. Дәрежелік функцияның туындысы:

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

Бұл формула дифференциалды есептеу және тексеру кезеңінде қажет.

Күрделі функцияның туындысын табу ережесі (Тізбекті ереже):

$$\left(f\big(g(x)\big)\right)' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

Бұл арқылы біз тапқан жауабымыздың дұрыстығын тексереміз.

Интегралдың бөлімінде x^4 айнымалысы тұр. Біз оны стандартты формулаға (u^2) сәйкестендіру үшін дәреженің қасиетін қолданып, $x^4 = (x^2)^2$ түрінде жазамыз. Осылайша, интеграл келесі түрге енеді:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1 - (x^2)^2}}$$

Бұл түрлендіру бізге алымдағы x пен бөлімдегі x^2 арасындағы туынды арқылы байланысты көруге мүмкіндік береді.

Бөлімдегі квадраттың астында тұрған өрнекті, яғни x^2-ты жаңа u айнымалысы ретінде белгілейміз:

$$u = x^2$$

Жаңа айнымалыға көшу үшін dx дифференциалын du арқылы өрнектеуіміз керек. Ол үшін енгізілген алмастырудан туынды аламыз:

$$du = (x^2)'dx = 2x\,dx$$

Интегралдың алымында тек $x\,dx$ көбейтіндісі тұрғандықтан, осы бөлікті анықтаймыз:

$$x\,dx = \frac{1}{2}du$$

Тапқан мәндерімізді бастапқы интегралға қойып, оны толықтай u айнымалысына көшіреміз:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) du$$

Тұрақты $\frac{1}{2}$ коэффициентін интеграл таңбасының алдына шығарамыз:

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

Ендігі кезек кестелік интегралды есептеу және бастапқы айнымалыға қайту. Енді бұл өрнек жоғарыда аталған арксинус формуласына толық сәйкес келеді. Интегралдап, u орнына бастапқы x^2 мәнін қоямыз:

$$\frac{1}{2}\arcsin(u) + C = \frac{1}{2}\arcsin(x^2) + C$$

Дәлелдеу: Нәтиженің дұрыстығын туынды арқылы дәлелдейміз. Табылған $F(x) = \frac{1}{2}\arcsin(x^2) + C$ функциясынан туынды алып, интеграл астындағы бастапқы өрнекті алуымыз керек.

Қолданылатын туынды формулалары:

Арксинус туындысы: $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$, дәреже туындысы: $(x^2)' = 2x$

Тексеру процесі:

$$F'(x) = \left(\frac{1}{2}\arcsin(x^2) + C\right)'$$

Тұрақты C туындысы 0-ге тең. $\frac{1}{2}$ коэффициентін сақтап, күрделі функция ережесімен туындыны табамыз:

$$F'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot (x^2)'\right)$$

$$F'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \cdot 2x$$

Бұл жерде алымдағы 2 мен бөлімдегі 2 сандары қысқарады:

$$F'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$$

Нәтижесінде бастапқы интеграл астындағы функция шықты. Бұл есептің шешімі толықтай дұрыс екенін дәлелдейді.

Жауабы:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2}\arcsin(x^2) + C$$

Мұндағы С тұрақты шама.

Қорытынды. Мақалада орта мектеп оқулығындағы С тобының есептері қарастырылды. Себебі бұл топтағы есептерді шығару арқылы оқушылардың білімін одан әрі жетілдіруге ықпал ететін және нағыз есеп шығаруға қабілеті зор оқушыларды іріктеп алуға, олардың ойлау қабілетін дамытуға, теория мен практиканы, сонымен қатар интегралдар кестесін ұтымды пайдалануға, яғни математикалық сауаттылығын шығармашылық тұрғыда байланыстыра білуге тәрбиелейді. Жаратылыстану ғылымындағы есептерді интеграл арқылы шешу – интеграл ұғымын оқытудағы сабақтастықтың қазіргі заманғы тенденцияларын анықтайды.

Әдебиеттертізімі:

1. Әбілқасымова А.Е., Корчевский В.Е., Жұмағұлова З.Ә. «Алгебра және анализ бастамалары»: жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 11 сыныбына арналған оқулық – Алматы: Мектеп, 2019 – 254б.
2. Кенжегулов Б., Сайдолқызы Ж., Аманғалиева Р.Қ., Якупова А.Б. «Тригонометриялық функциялар, теңдеулер, теңсіздіктер және олардың қолданылуы»: Оқу құралы. – Атырау: Х.Досмұхамедов атындағы Атырау университеті; 2024 – 258б.
3. Бараненко Г.С., Демидович Б.П., Ефименко В.А., Коган С.М., Лунц Г.Л., Поршнева Е.Ф., Сычева Е.П., Фролов С.В., Шостак., Янпольский А.Р. «Задачи и упражнения по математическому анализу»: Под редакцией Б.П. Демидовича – Москва: Изд-во Наука, 1974 – 472 с.