

**МЕКТЕПТЕ ЖӘНЕ ЖОҒАРҒЫ ОҚУ ОРНЫНДА ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ  
ТЕНДЕУЛЕРДІ ОҚЫТУДАҒЫ САБАҚТАСТЫҚ**

**Есмуратова Рысты Табылдиевна**

*«7M01503 Математика.Білім беру үдерісін басқару» мамандығының*

*2-курс магистранты*

*E-mail: Rysty84@bk.ru*

*Х.Досмұхамедов атындағы Атырау университеті*

*Физика, математика және ақпараттық технологиялар факультеті*

*Математика және математиканы оқыту әдістемесі кафедрасы*

Дифференциалдық теңдеу-негізі математикалық ұғымдардың бірі. Табиғат құбылыстарын зерттеу кезінде физика және техника, химия, биология мәселелерін шешкенде эволюциялық процесті анықтайтын шамалар арасындағы тәуелділік, шамалар мен олардың өзгеру жылдамдықтары арасындағы байланыс түрінде болатын белгісіз функциялар мен олардың туындыларын байланыстыратын дифференциалдық теңдеулер ретінде алынады.

Аргументті, осы аргументтің белгісіз функциясын және осы функцияның туындыларын байланыстыратын теңдеулер дифференциалдық теңдеулер деп аталады. Мысалы, ең қарапайым дифференциалдық теңдеу  $\frac{dy}{dx} = f(x)$  түрінде болады.  $f(x)$  - белгілі,  $y = y(x)$  - ізделінді белгісіз функция. Бұл теңдеу шешімдерін  $f(x)$  функциясының алғашқы функциялары деп атайды.  $y = \int f(x)dx + C$  дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімдер жиынын береді [1].

Жаңартылған білім беру жүйесінде мектепте 11-сыныптың «Алгебра және анализ бастамалары» курсына дифференциалдық теңдеулер туралы жалпы мағлұмат, айнымалылары ажыратылатын бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер, екінші ретті тұрақты коэффициентті біртекті сызықтық дифференциалдық теңдеулер тақырыптары қарастырылған. Оқулықта берілген есептердің мазмұны төмендегідей:

- 1) дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімін табу керек;
- 2) берілген шартты қанағаттандыратын  $y' = f(x)$  дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табу;
- 3)  $y' = f(x)$ ,  $y'' = f(x)$  түріндегі дифференциалдық теңдеулерді шешу.

Бұл есептерді шешу үшін білім алушылар дифференциалдық теңдеудің шешімінің анықтамасын, функцияның туындысы мен алғашқы функциясын табу формулалары мен ережелерін білу қажет.

Дифференциалдық теңдеулерді оқыту жалпы математикалық мәдениетті қалыптастыру мен математикалық анализ курсынан алған білімдерін тиянақтылауға қажетті шарт болып табылады.

Мектеп математика курсына оқушылардың дифференциалдық теңдеулер көмегімен есептер шығаруға үйрету үшін оқытудың тиімділігін арттыра алатын практикаға бағытталған тәсілдерді қолдану керек. Білім алушылардың тәжірибелік өзектілігі және дағдыларына оқу материалдарының мазмұнын таңдау жүйесі ықпал етеді [2].

Оқушылар нақты процестерді сипаттайтын дифференциалдық теңдеулер құра білу ғана емес, сонымен қатар дифференциалдық теңдеулердің қарапайым түрлері: айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеулер, біртекті теңдеулер, сызықтық дифференциалдық теңдеулер, Бернулли теңдеуі, Лагранж теңдеулерін, Коши есебін шешу жолдарын білу керек.

Оқушыларға ұсынылатын практикаға бағытталған дифференциалдық теңдеулерді қолдану арқылы шығарылатын есептерді ұсынамыз:

**1-есеп.** Катер өзен бойымен 32 км/сағ жылдамдықпен қозғалып, 1 минуттан соң қозғалтқышы өшірілген кезде оның жылдамдығы 8 км/сағ болды. Егер судың кері итеруші күші катердің қозғалыс жылдамдығына пропорционал болса, онда катердің қозғалтқышы тоқтағаннан кейін 2 минуттан соң жылдамдығы қандай болады? Катер қозғалтқышы өшкен соң 1 минут аралығында қандай қашықтықты жүзіп өтті? Катер қозғалтқышы өшкен соң 2 минут аралығында қандай қашықтықты жүзіп өтеді?

*Шешуі:* Есептің шартына талдау жасай отырып, оқушылар судың кері итеруші күші катердің қозғалыс жылдамдығына пропорционал болатынын ескере отырып, катердің қозғалтқышы тоқтағаннан кейін 2 минуттан соң жылдамдығын анықтайды. Есепті шешудің 1-кезеңінде оқушыларға есептің математикалық моделін құрастыру ұсынылады.

$v$  - катердің жылдамдығы, ал  $k$  - пропорционалдық коэффициент. Есептің шарты бойынша катерге қозғалыс барысында  $F = -k \cdot v$  күші әсер етеді. Ньютонның екінші заңы бойынша бұл күш  $F = m \cdot \frac{dv}{dt}$ , мұндағы  $m$  - масса,  $a$  үдеу. Сәйкесінше,  $m \cdot \frac{dv}{dt} = -k \cdot v$  катердің

қозғалысын сипаттайтын дифференциалдық теңдеу болып табылады.

Есепті шешудің 2-кезеңінде оқушылар дифференциалдық теңдеуді айнымалыларды ажырату әдісі арқылы шешімін табады.

$$t = 2 \text{ болғанда } v = 32 \cdot 4^{-\frac{60 \cdot 1}{30}} = 32 \cdot 4^{-2} = 32 \cdot \frac{1}{16} = 2 \text{ мәнін аламыз.}$$

Оқушылар 3-кезеңде есептің шартына сәйкес алынған нәтижелерді тексереді. Сонымен, катердің қозғалтқышы тоқтаған соң 2 минуттан кейінгі жылдамдығы 2 км/сағ болады.

Есептің 1-сұрағына жауап берген соң, оқушылар келесі сұрақтарға жауап береді: қозғалтқышты ажыратқаннан соң 1 минуттан кейін катер қандай қашықтыққа дейін барады? Қозғалтқышты ажыратқаннан соң 2 минуттан кейін катер қандай қашықтыққа дейін барады?

Оқушылар мәтіндік есептің математикалық моделін құрады. Катердің қозғалтқышын ажыратқаннан соң жүрген қашықтығын  $S$  деп белгілейміз. Бұл шама уақытқа тәуелді шама  $S = S(t)$  екені белгілі.  $t = 0$  болғанда,  $S(0) = 0$

Физикалық мағынасы жағынан жүрілген жолдың уақыт бойынша алынған туындысы жылдамдыққа тең болады:

$$S'(t) = 32 \cdot 4^{-60t}$$

$S(0) = 0$  деп есептеп, теңдеуді интегралдаймыз:

$$S = \int_0^t 32 \cdot 4^{-60x} dx = \int_0^t 4^{-60x} d(-60x) = -\frac{8}{15} \cdot \frac{4^{-60x}}{\ln 60} \Big|_0^t = \frac{8}{15 \ln 60} [1 - 4^{-60t}]$$

Есептеуді жеңілдету үшін  $\ln 60 = 4$  деп аламыз. Сондықтан алдыңғы теңдіктен келесі теңдікті шығарамыз:  $S = \frac{2}{15} [1 - 4^{-60t}]$

$$t = 1 \text{ минут болғанда } S = \frac{1}{10} \text{ км} = 100 \text{ м және } t = 2 \text{ минут болғанда } S = \frac{1}{8} \text{ км} = 125 \text{ м}$$

Есептің математикалық моделінің 3-кезеңінде есептің шартына қайта ораламыз. Сонымен, қозғалтқышты ажыратқаннан соң 1 минуттан кейін катер 100 м қашықтыққа дейін барады. Қозғалтқышты ажыратқаннан соң 2 минуттан кейін катер 125 м қашықтыққа дейін барады. Есептің толық шешімін қарастырайық.

*Шешуі:*  $v$  - катердің жылдамдығы, ал  $k$  - пропорционалдық коэффициент. Есептің шарты бойынша катерге қозғалыс барысында  $F = -k \cdot v$  күші әсер етеді. Ньютонның екінші заңы бойынша бұл күш  $F = m \cdot \frac{dv}{dt}$ , мұндағы  $m$  - масса,  $a$  үдеу. Сәйкесінше,

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = -k \cdot v \quad (1.1)$$

катердің қозғалысын сипаттайтын дифференциалдық теңдеу болып табылады. (1.1) теңдеуді айнымалыларын ажыратып, интегралдаймыз:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} dt$$

$$\ln|v| = \ln e^{-\frac{k}{m}t} + \ln C$$

(1.1) дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімі келесі түрде болады:

$$v = C \cdot e^{-\frac{k}{m}t} \quad (1.2)$$

$t = 0$  болғанда катердің жылдамдығы 32 км/сағ, ал  $t = 1 \text{ мин} = \frac{1}{60} \text{ сағ}$  кейін, жылдамдығы 8 км/сағ болады. Онда (1.2) жалпы шешімнен келесі теңдіктерді аламыз:

$$32 = C \quad 8 = C \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot \frac{1}{60}}$$

Демек  $C = 32$  және  $8 = 32 \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot \frac{1}{60}}$ , онда  $4^{-1} = e^{-\frac{k}{m} \cdot \frac{1}{60}}$  немесе  $e^{-\frac{k}{m}} = 4^{-60}$  (1.2) қойып, келесі теңдікті аламыз:

$$v = 32 \cdot 4^{-60t} \quad (1.3)$$

$t = 2 \text{ мин} = \frac{1}{30} \text{ сағ}$  болғанда, (1.3) теңдіктен келесі теңдікті аламыз:

$$v = 32 \cdot 4^{-60 \cdot \frac{1}{30}} = 32 \cdot 4^{-2} = 2$$

Сонымен, катердің қозғалтқышы тоқтаған соң 2 минуттан кейінгі жылдамдығы 2 км/сағ болады.

Катердің қозғалтқышын ажыратқаннан соң жүрген қашықтығын  $S$  деп белгілейміз. Бұл шама уақытқа тәуелді шама  $S = S(t)$  екені белгілі.  $t = 0$  болғанда,  $S(0) = 0$

Физикалық мағынасы жағынан жүрілген жолдың уақыт бойынша алынған туындысы жылдамдыққа тең болады:

$$S'(t) = 32 \cdot 4^{-60t}$$

$S(0) = 0$  деп есептеп, теңдеуді интегралдаймыз:

$$S = \int_0^t 32 \cdot 4^{-60x} dx = \int_0^t 4^{-60x} d(-60x) = -\frac{8}{15} \cdot \frac{4^{-60x}}{\ln 60} \Big|_0^t = \frac{8}{15 \ln 60} [1 - 4^{-60t}]$$

Есептеуді жеңілдету үшін  $\ln 60 = 4$  деп аламыз. Сондықтан алдыңғы теңдіктен келесі теңдікті шығарамыз:

$$S = \frac{2}{15} [1 - 4^{-60t}]$$

$$t = 1 \text{ мин} = \frac{1}{60} \text{ сағ} \text{ болғанда, } S = \frac{2}{15} [1 - 4^{-1}] = \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{10} \text{ (км)}$$

$$t = 2 \text{ мин} = \frac{1}{30} \text{ сағ} \text{ болғанда, } S = \frac{2}{15} [1 - 4^{-2}] = \frac{2}{15} \cdot \frac{15}{16} = \frac{1}{8} \text{ (км)}$$

**Жауабы:** Қозғалтқышты ажыратқаннан соң 1 минуттан кейін катер 100 м қашықтыққа дейін барады. Қозғалтқышты ажыратқаннан соң 2 минуттан кейін катер 125 м қашықтыққа дейін барады[4].

**2-есеп.** Су резервуарына жіберілген организмдердің өсуі онда тіршілік ететін организмдердің санына пропорционал. Олардың саны бірінші рет өлшенгенде әр литрде 12 болды және үш аптадан кейін өлшегенде әр литрде 81 болды.

а) Кез келген  $t$  күнінде организмдердің судағы концентрациясын модельдейтін теңдеуді жазыңыз.

б) Неше күннен кейін резервуардың әр литрінде 1250 организм болады.

*Шешуі.*  $N$  судың әрбір литріндегі организмдердің саны. Сонда  $\frac{dN}{dt}$  - организмдердің өсу жылдамдығы.

«Организмдердің өсу жылдамдығы организмдердің санына пропорционал» шарты бойынша келесі теңдеуді құрамыз:

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

Енді табылған айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеуді шешеміз:

$$\frac{dN}{N} = k dt$$

$$\int \frac{dN}{N} = \int k dt$$

$$\ln N = kt + C$$

$N = e^{kt+C} = e^{kt} \cdot e^C = Ae^{kt}$  ( $e^C = A$  алмастыруын қолданамыз) – дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі.

Дербес шешімді табу үшін есептің шартында берілген қосымша ақпаратты қолданамыз: «бірінші рет өлшегенде әр литрдегі саны 12 болды және үш аптадан кейін мұнда әр литрде 81 болды». Осы сөйлемдерден келесі бастапқы шарттарды жазуға болады:

$t = 0$  үшін  $N = 12$

$t = 21$  үшін  $N = 81$

$t = 0$ ,  $N = 12$  мәндерін жалпы шешімге қоямыз:  $12 = Ae^{k \cdot 0}$ , осыдан  $A = 12$  болады.

$t = 21$ ,  $N = 81$  және  $A = 12$  мәндерін жалпы шешімге қоямыз:  $81 = 12e^{k \cdot 21}$

$$e^{21k} = \frac{81}{12} = \frac{27}{4}$$

$$21k = \ln \frac{27}{4}$$

$$k = \frac{1}{21} \ln \frac{27}{4} \approx 0,0909$$

$$N = 12e^{0,0909t}$$

б)  $t$  –ның қандай мәнінде  $N = 1250$  болады?

$$1250 = 12e^{0,0909t}$$

$t = 52$  күн

*Жауабы:* 52 күн. [5]

Қорытындылай келе, оқушыларды дифференциалдық теңдеулерді шешуге үйретудің келесі әдістемелік жолдарын ұсынуға болады:

-дифференциалдық теңдеулерге келтірілетін есептерді шығару;

-практикаға бағытталған есептерді шығару;

### Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. Аммосова Н.В., Лобанова Н.И. Решение неопределенных уравнений первой степени с двумя неизвестными в системе дополнительного образования. М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2016. 422 с

2. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений : базовый и профил. уровни / [Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин]; под ред. А. Б. Жижченко. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 336 с.

3. Әбілқасымова А.Е., В.Е.Корчевский, З.Ә.Жұмағұлова/ Алгебра және анализ бастамалары. Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 11-сыныбына арналған оқулық. -Алматы: Мектеп, 2020.-256б.

4. Лобанова Н.И. Элементы теории дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования // Интернет-журнал «Мир науки» 2016, Том 4, номер 6 <http://mir-nauki.com/PDF/32PDMN616.pdf> (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ

5. Омаров А. Дифференциалдық теңдеулер арқылы пәнаралық байланыстарды жүзеге асыру //Математика және физика.,№26. Алматы, 2003. – Б.39-46.