ӘОЖ 517.3

АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛДЫ ҚОЛДАНУ АРҚЫЛЫ ЕСЕПТЕРДІ ШЕШУДІҢ ӘДІСТЕМЕЛІК НЕГІЗДЕРІ

Қашқынбай Шынаргүл Серікбайқызы
«Математика. Білім беру үрдісін басқару» білім бағдарламасының 2-курс магистранты**,**
Х.Досмұхамедов атындағы Атырау университеті, Атырау қ., Қазақстан Республикасы
e.mail: medet_shnargul@mail.ru

Ғылыми жетекшісі: ф-м.ғ.к., .профессор, **Шаждекеева Нургуль Кыдырбаевна[2]**

Андатпа. Бұл мақалада анықталған интеграл көмегімен есептерді шешудің әдістемелік ерекшеліктері қарастырылады. Автор интегралдарды оқыту барысында тек стандартты есептермен шектелмей, оқушылардың логикалық ойлауын, зерттеушілік қабілеттерін және математикалық сауаттылығын дамытуға бағытталған тапсырмалар жүйесін ұсынады. Сонымен қатар, теңдеулер мен теңсіздіктерді шешу, параметрлі есептерді талдау және графиктік интерпретациялау әдістері сипатталған. Зерттеу нәтижелері анықталған интеграл тақырыбын тиімді оқыту оқушылардың математикалық дайындығын арттыратынын көрсетеді.
Кілт сөздер: анықталған интеграл, интегралдау әдістері, айнымалыны ауыстыру, теңдеулер мен теңсіздіктер, параметрлі есептер, математиканы оқыту әдістемесі, математикалық модельдеу, графиктік интерпретация, Коши теңсіздігі, аналитикалық ойлау
Аннотация. В статье рассматриваются методические особенности решения задач с использованием определённого интеграла. Автор предлагает систему заданий, направленных не только на формирование вычислительных навыков, но и на развитие логического мышления, исследовательских способностей и математической грамотности учащихся. Особое внимание уделяется решению уравнений и неравенств, задач с параметрами, а также графической интерпретации результатов. Показано, что эффективное обучение теме определённого интеграла способствует углублению математической подготовки учащихся.
Ключевые слова: определённый интеграл, методы интегрирования, замена переменной, уравнения и неравенства, задачи с параметрами, методика обучения математике, математическое моделирование, графическая интерпретация, неравенство Коши, аналитическое мышление

Abstract. This article discusses methodological approaches to solving problems using the definite integral. The author proposes a system of tasks aimed not only at developing computational skills but also at enhancing students' logical thinking, research abilities, and mathematical literacy. Special attention is given to solving equations and inequalities, parameter-based problems, and graphical interpretation of results. The study shows that effective teaching of the definite integral significantly improves students' mathematical competence.
Keywords: definite integral, integration methods, substitution method, equations and inequalities, parameter-based problems, mathematics teaching methodology, mathematical modeling, graphical interpretation, Cauchy inequality, analytical thinking

Кіріспе. Қазіргі математиканы оқыту үдерісінде анықталған интеграл тақырыбы маңызды орын алады. Дегенмен, оны оқыту барысында көбіне тек стандартты есептер қарастырылады: интегралды есептеу, функция мәндерін анықтау, жазық фигуралардың ауданын және айналу денелерінің көлемін табу. Бұл есептер негізгі болғанымен, олар интеграл ұғымының терең мазмұнын толық ашпайды.

Анықталған интегралды оқыту тек есептеу дағдыларын қалыптастырумен шектелмей, оқушылардың зерттеушілік қабілеттерін, логикалық ойлауын және шығармашылық белсенділігін дамытуға бағытталуы тиіс. Осы тұрғыда мотивация факторы ерекше рөл атқарады. Педагогикалық тәжірибе көрсеткендей, оқушының жеке мақсаттары оның оқу белсенділігін арттырып, нәтижеге жету ықтималдығын жоғарылатады.

Мақалада анықталған интегралдарды қолдануға негізделген әртүрлі типтегі есептер жүйесі ұсынылған: теңдеулерді, теңсіздіктерді шешу, тізбектердің қасиеттерін зерттеу, параметрлі есептерді талдау және аймақтарды графиктік түрде бейнелеу. Бұл тапсырмалар оқушылардың тек техникалық дағдыларын ғана емес, сонымен қатар аналитикалық ойлауын дамытуға бағытталған.

Мысалдарды талдау барысында интегралдарды есептеудің әртүрлі әдістері қарастырылады: тікелей интегралдау, айнымалыны ауыстыру, теңдеулерді түрлендіру және қосымша математикалық құралдарды (мысалы, Коши теңсіздігі) қолдану. Әсіресе, тригонометриялық және параметрлі есептерді шешу оқушылар үшін күрделі болып табылады, себебі олар бірнеше математикалық ұғымдарды бір уақытта қолдануды талап етеді.

Сонымен қатар, бірнеше айнымалысы бар теңсіздіктерді шешу және алынған нәтижелерді координаталық жазықтықта бейнелеу тапсырмалары оқушылардың кеңістіктік ойлау қабілетін дамытады. Мұндай есептер математиканы практикалық тұрғыдан түсінуге мүмкіндік береді.

Анықталған интегралдарды оқытудағы маңызды аспектілердің бірі — оқытуды саралау. Оқушылардың дайындық деңгейіне байланысты әртүрлі күрделілік деңгейіндегі тапсырмаларды ұсыну олардың танымдық белсенділігін сақтауға мүмкіндік береді. Сонымен қатар, сабақ барысында жеке және топтық жұмыс түрлерін тиімді үйлестіру қажет.

Зерттеу нәтижелері көрсеткендей, анықталған интеграл тақырыбын меңгеру оқушылардың математикалық дайындығын тереңдетіп, олардың жоғары сыныптардағы және жоғары оқу орындарындағы оқуына негіз қалайды. Сондықтан интегралдарды оқыту барысында әдістемелік тұрғыдан дұрыс ұйымдастырылған тапсырмалар жүйесін қолдану ерекше маңызды.

Қорытындылай келе, анықталған интегралдарды оқыту тек теориялық білім берумен шектелмей, оқушылардың логикалық, аналитикалық және зерттеушілік қабілеттерін дамытуға бағытталуы тиіс. Бұл мақсатқа жету үшін есептердің әртүрлі типтерін қолдану және тиімді оқыту әдістерін таңдау қажет.

Материалдар мен әдістер. Анықталған интеграл көмегімен есептерді шешудің ерекшеліктерін оқыту барысында көбіне тек бөлімнің жалпы мәселелері қарастырылады, мысалы: **анықталған интегралдарды есептеу, функция мәнін табу, айналмалы дененің көлемін анықтау және жазық фигураның ауданын есептеу.**

Аталған есептерді міндетті немесе негізгі деп айтуға болмайды, себебі олар интеграцияның мәнін жалпы түсінуге көмектеседі және **математика пәнін оқытудың шығармашылық дағдыларын** дамытады.

Педагогтардың пікірінше, біз өзімізге қойған мақсаттар (басқалардың қойған мақсаттарынан айырмашылығы) **күшті мотивациямен сипатталады.** Оқушылар көбінесе **жеке мақсаттарды орындауға** ұмтылады және сол мақсаттарға жеткенде **жетістікке қуанады**.

Жоғарыда айтылғандай, мотивацияланған оқушы **оқыту процесіне қызығушылық танытады** және сабақта белсенділік көрсетеді. Мұндай оқушыларға **түсінуге, шешуге және ойлауға ұмтылу** тән.

Төменде келтірілген құрылымдық мысалдарды **интегралдар тақырыбын оқыту кезінде қолдануға болады**, сонымен қатар тапсырмаларға бірнеше шешу нұсқалары ұсынылған [5].

I. Келесі теңдеулерді шешіңіз:

A)

$$\int_1^x (y^3-3y^2-2y-1)dy = -\frac{3}{4}x^4 - 3x^3 + x + \frac{11}{4}$$

Шешуі. Интегралды есептейміз:

$$\int_1^x (y^3-3y^2-2y-1)dy = (\frac{1}{4}y^4 - y^3 - y^2 - y)\Big|_1^x =$$

$$=\left(\frac{1}{4}x^4 - x^3 - x^2 - x\right) - \left(\frac{1}{4} - 1 - 1 - 1\right) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - x^2 - x + 2\frac{3}{4}$$

Онда:

$\frac{1}{4}x^4 - x^3 - x^2 - x + 2\frac{3}{4} = -\frac{3}{4}x^4 - 3x^3 + x + \frac{11}{4} \Rightarrow x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = 0 \quad \Rightarrow\Rightarrow x(x^3 + 2x^2 - x - 2) = 0.$

Берілген теңдеуді шешу арқылы: $x = 0$, $x = +1$, $x = -2$.

Жауабы: – 2, – 1, 0, 1.

Айта кету керек, бұл тапсырмада ешқандай қосымша әрекет қажет болған жоқ. Шешім **қарапайым интегралдарды табу техникасы** және теңдеуді, соның ішінде кубикалық теңдеуді шешу арқылы алынды.

Б)

$$\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{y} \frac{\sin x - 4\cos x}{\sin^3 x}dx = 1\,,\ \ y \in \left(-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right) \cup (-\pi; 0).$$

Шешуі: (Интеграл $y = \pi * n, n \in Z$ кезінде анықталмағандықтан, осындай нүктелер тапсырма облысынан алынып тасталған). Интеграл мәнін есептейміз:

$$\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{y} \frac{\sin x - 4\cos x}{\sin^3 x}dx = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{y}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{4\cos x}{\sin^3 x}\right)dx = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{y}\frac{dx}{\sin^2 x} - 4\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{y}\frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x} =$$

$$= -\mathrm{ctg}\, y + 2\mathrm{ctg}^2 y.$$

Осы есептеулерді жеке қарастырайық:

$$\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{y}\frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x\Big|_{-\frac{3\pi}{2}}^{y} = -\left(\mathrm{ctg}\, y - \mathrm{ctg}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right) = -\mathrm{ctg}\, y$$

$$4\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{y}\frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x} = 4\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{y}\frac{1}{\sin^2 x} * \mathrm{ctg}\, x\,dx =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{Пусть } t = \mathrm{ctg}\, x, \text{тогда } dt = -\frac{1}{\sin^2 x}dx \\ \int \mathrm{ctg}\, x * \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\int t dt = -\frac{t^2}{2} + C = -\frac{\mathrm{ctg}^2 x}{2} + C \end{bmatrix} =$$

$$= -4 * \frac{\mathrm{ctg}^2 x}{2}\Big|_{-\frac{3\pi}{2}}^{y} = -2\mathrm{ctg}^2 x\Big|_{-\frac{3\pi}{2}}^{y} = -2\left(\mathrm{ctg}^2 y - \mathrm{ctg}^2\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right) = -2\mathrm{ctg}^2 y.$$

Теңдіктің бөліктерін теңестіріп, аламыз:

$$-\mathrm{ctg}\, y + 2\mathrm{ctg}^2 y = 1 \Rightarrow 2\mathrm{ctg}^2 y - \mathrm{ctg}\, y - 1 = 0.$$

Жоғарыда келтірілген тригонометриялық теңдеуді шешіп, аламыз:

$$y_{1n} = \frac{\pi}{4} + \pi * n, \quad y_{2k} = -\mathrm{arcctg}\frac{1}{2} + \pi * (k+1), \text{где } n, k \in Z.$$

Себебі $y \in \left(-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right) \cup (-\pi; 0)$ (шартқа сәйкес), таңдау әдісімен аламыз: $y = -\mathrm{arcctg}\frac{1}{2}, y = -\frac{3\pi}{4}, y = -\left(\pi + \mathrm{arcctg}\frac{1}{2}\right)$.

Жауап: $-\mathrm{arcctg}\frac{1}{2}; -\frac{3\pi}{4}; -\left(\pi + \mathrm{arcctg}\frac{1}{2}\right)$.

Келтірілген тапсырмада оқушылар айнымалының мүмкін болатын мәндері жиыны **табуға, тригонометриялық теңдеуді шешуге** және **түбірлерді таңдауға** бағытталған зерттеу жүргізеді. Осы тапсырманы орындау барысында оқушылар **есептелмейтін интегралдарды есептеу**ге және **орынбасу әдісі арқылы шешуге** кездеседі – аталған әдіс көптеген мұғалімдердің педагогикалық тәжірибесінде негізгі қиындық туғызады. Айта кету керек, **дұрыс орынбасуды таңдау және шешуде балама әдістерді қолдану** қажет нәтиже береді.

ІІ.Теңсіздіктерді шешіңіз.

А)

$$\int_{-x}^{x} (y^2 + 8y + 4)\, dy \le -\frac{4}{3}x^3 - 11x^2 + 4x + 5.$$

Шешуі. Анықталған интегралды есептейміз:

$$\int_{-x}^{x} (y^2 + 8y + 4)\, dy = \left(\frac{1}{3}y^3 + 8 * \frac{1}{2}y^2 + 4y\right)\Big|_{-x}^{x} =$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 + 4x\right) - \left(\frac{1}{3} * (-x^3) + 4 * (-x)^2 + 4 * (-x)\right) = \frac{2}{3}x^3 + 8x.$$

онда $\frac{2}{3}x^3 + 8x \le -\frac{4}{3}x^3 - 11x^2 + 4x + 5 \Rightarrow 2x^3 + 11x^2 + 4x - 5 \le 0.$

Сол жақ бөліктегі көпмүшелікті нөлге теңестіріп, теңдеудің түбірлерін табамыз:

$$2x^3 + 11x^2 + 4x - 5 = 0.$$

Сонда түбірлер:

$x_1 = -5; x_2 = -1; x_3 = \frac{1}{2}$

Теңсіздікті **интервал әдісімен** шешеміз: $(x+5)(x+1)\left(x - -\frac{1}{2}\right) \le 0$,

сонда, $x \in (-\infty; -5] \cup \left[-1; \frac{1}{2}\right]$.

Жауап: $(-\infty; -5] \cup \left[-1; \frac{1}{2}\right]$.

3.Шектік мәнін табу:

(А)

$$(a_n) = \int_{1}^{n} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx, \quad n \in N$$

Шешуі. Берілген интегралды анықтаймыз:

$$\int_{1}^{n} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx = \left(x + \frac{1}{x}\right)\Big|_{1}^{n} = \left(n + \frac{1}{n}\right) - (1+1) = n + \frac{1}{n} - 2.$$

Бірнеше теріс емес сандарға арналған Коши теңсіздігін қолданып, келесі өрнекті бағалаймыз: $n + \frac{1}{n}: \frac{n+\frac{1}{n}}{2} \le \sqrt{n * \frac{1}{n}} \Rightarrow n + \frac{1}{n} \ge 2.$

Содан кейін, қарастырылып отырған теңсіздіктің **екі жағына да 2 қоссақ**, келесі **шаманы бағалауды** аламыз (a_n): $n + \frac{1}{n} - 2 \ge 2 - 2 \Rightarrow n + \frac{1}{n} - 2 \ge 0 \Rightarrow (a_n) \ge 0.$

Жауап: [0;+∞).

Б)

$$(b_n) = 9\frac{1}{8} + \int_2^n \left(3x^2 - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) dx\,, \quad n \in N.$$

Шешуі. Анықталған интегралды есептейміз:

$$\int_2^n \left(3x^2 - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) dx = 3\int_2^n x^2\,dx - 2\int_2^n x^{-2}\,dx - \int_2^n x^{-3}\,dx =$$

$$= x^3 \Big|_2^n + \frac{2}{n}\Big|_2^n + \frac{1}{2x^2}\Big|_2^n = n^3 - 2^3 + \frac{2}{n} - 1 + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2 * 2^2} = n^3 + \frac{1}{2n^2} + \frac{2}{n} - 9\frac{1}{8}$$

Онда: $(b_n) = 9\frac{1}{8} + n^3 + \frac{1}{2n^2} + \frac{2}{n} - 9\frac{1}{8} = n^3 + \frac{1}{2n^2} + \frac{2}{n}.$

Үш теріс емес санға арналған Коши теңсіздігін қолданамыз да, (b_n) тізбегін бағалаймыз:

$$\frac{n^3 + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n}}{3} \geq 3\sqrt{n^3 * \frac{1}{2n^2} * \frac{1}{n}} \Rightarrow n^3 + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n} \geq 3 \Rightarrow (b_n) \geq 3.$$

Жауап:$[3;+\infty)$.

А және Б тапсырмаларының негізгі қиындығы – оқушылардың Коши теңсіздігін қаншалықты жақсы білетініне байланысты.

4.Координаталық жазықтықта келесі шарттарға сәйкес келетін нүктелер жиынын (аймақты) бейнелеңіз:

А) $\begin{cases} \int_{-1}^{x}(z+2)\,dz + \int_0^y (2z-5)dz \leq -\frac{x^2}{2} + y + \frac{1}{2} \\ \int_{-4}^{y} dz > 2\int_0^x z\,dz \end{cases}$

Шешуі. Жүйедегі әрбір теңсіздікті жеке-жеке түрлендіреміз:

$$\int_{-1}^{x}(z+2)\,dz + \int_0^y (2z-5)dz \leq -\frac{x^2}{2} + y + \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{z^2}{2} + 2z\right)\Big|_{-1}^{x} + (z^2 - 5z)\Big|_0^y \leq -\frac{x^2}{2} + y + \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right) - \left(\left(\frac{(-1)^2}{2} + 2 * (-1)\right)\right) + y^2 - 5y \leq \frac{x^2}{2} + y + \frac{1}{2} \Rightarrow$$

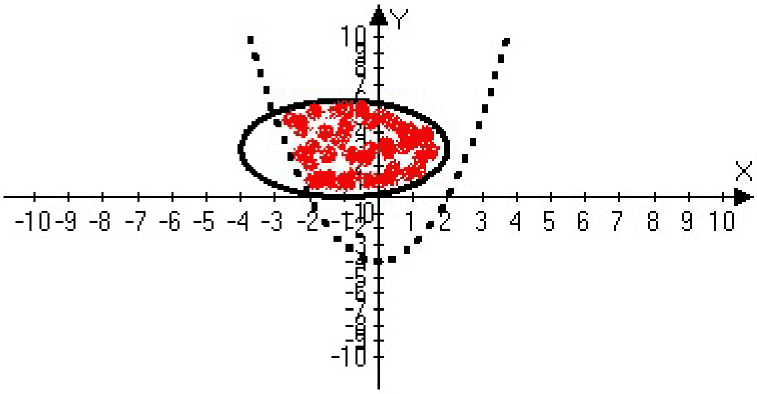
$$\Rightarrow x^2 + 2x + y^2 - 6y + 1 \leq 0 \Rightarrow (x+1)^2 + (y-3)^2 \leq 9$$

$$\int_{-4}^{y} dz > 2\int_0^x z\,dz \Rightarrow z\Big|_{-4}^{y} > z^2\Big|_0^x \Rightarrow y + 4 > x^2 \Rightarrow y > x^2 - 4$$

Есептеулерді ескере отырып, берілген жүйе келесі түрге ие болады:

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-3)^2 \leq 9; \\ y > x^2 - 4. \end{cases}$$

Координаталық жазықтықта жүйедегі әрбір теңсіздікке сәйкес келетін нүктелер жиынын **штрихтауымыз керек** (сурет 3):



Сурет 3 – Жүйенің графикалық шешімі
Боялған бөлік – ізделінетін аймақ.

Б) $\begin{cases} \int_3^y dz > \int_0^x e^z dz, \\ y-2 \geq -\int_1^x \frac{2dz}{z^2}, \ x>0 \end{cases}$ (Мұндай құрылымды **көрсеткішті функцияны** оқығаннан кейін қолдану логикалық болады).

Шешуі. Жүйедегі әрбір теңсіздікті жеке-жеке түрлендіреміз:

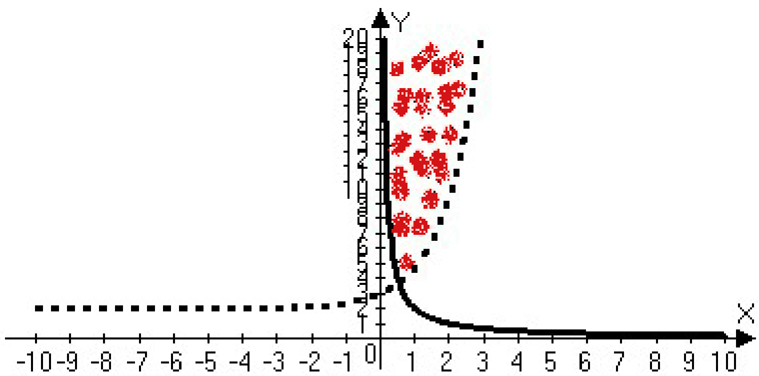
$$\int_3^y dz > \int_0^x e^z dz \Rightarrow z\Big|_3^y > e^z\Big|_0^x \Rightarrow y-3 > e^x - e^0 \Rightarrow y > e^x + 2$$

$$y-2 \geq -\int_1^x \frac{2dz}{z^2} \Rightarrow y-2 \geq \frac{2}{x} - 2 \Rightarrow y \geq \frac{2}{x}$$

Есептеулерді ескере отырып, жүйе келесі түрге ие болады:

$$\begin{cases} y > e^x + 2; \\ y \geq \frac{2}{x}, \quad x > 0 \end{cases}$$

Координаталық жазықтықта жүйедегі әрбір теңсіздікке сәйкес келетін нүктелер жиынын **штрихтауымыз керек** (сурет 4):



Сурет 4 – Жүйенің графикалық шешімі
Боялған бөлік – ізделінетін аймақ.

А және Б тапсырмаларының қиындығы – оқушылардың бірнеше айнымалысы бар теңсіздіктерді дұрыс шеше алуында.

5. Параметрдің барлық мәндерінде теңдеулерді шешіңіз.

А)

$$2\int_0^x \left[(a^2-1)*y + \frac{1}{2}*(a+1)\right]dy = 3.$$

Шешуі. Алдымен берілген интегралды есептейміз:

$$2\int_0^x \left[(a^2-1)*y+\frac{1}{2}*(a+1)\right]dy=\left[\frac{a^2-1}{2}*y^2+\frac{a+1}{2}*y\right]\Big|_0^x=$$

$$=\frac{a^2-1}{2}*x^2+\frac{a+1}{2}*y.$$

онда:$2*\left(\frac{a^2-1}{2}*x^2+\frac{a+1}{2}*x\right)=3\Rightarrow(a^2-1)*x^2+(a+1)*x-3=0$

Осы теңдеуді параметр а бойынша шешсек, аламыз:

1. егер a = – 1: – 3 = 0, демек, шешімі жоқ; егер a = 1: сызықты теңдеуді аламыз$2x$ – 3 = 0, $\Rightarrow x=\frac{3}{2}$;

2. егер $a\neq\pm1: D=(a+1)^2-4*(-3)-(a^2-1)=13a^2+2a-11$

2.1. егер $D<0,$ т. е. $13a^2+2a-11<0\Rightarrow a\in\left(\frac{-1-\sqrt{143}}{13};\frac{-1+\sqrt{143}}{13}\right)$, онда шешімі жоқ;

2.2. егер $D\geq0,$ т. е. $13a^2+2a-11\geq0\Rightarrow a\in\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{143}}{13}\right]\cup\left[\frac{-1+\sqrt{143}}{13};+\infty\right)$.

Сұрыптау жүргізіп, жауапты жазамыз

Жауап: $a\in(-\infty;-1)\cup\left(-1;\frac{-1-\sqrt{143}}{13}\right]\cup\left[\frac{-1+\sqrt{143}}{13};1\right)\cup(1;+\infty)$: $x_{1,2}=\frac{-(a+1)\pm\sqrt{13a^2+2a-11}}{2a^2-2}$ кезінде;

$a\in(-1)\cup\left(\frac{-1-\sqrt{143}}{13};\frac{-1+\sqrt{143}}{13}\right)$: кезінде жауабы жоқ

a = 1: $x=\frac{3}{2}$ кезінде.

Алдыңғы айтылғандай, «**Анықталған интегралдар**» сияқты тақырыпты игеру – өте күрделі процесс, мұнда:

– оқушылар белгілі бір білім, дағдылар мен практикалық машықтарды алады;

– белгілі бір идеялар мен фактілер жиынтығын (шарттарды) меңгереді.

Талқылау және нәтижелер. Анықталған интегралдарды игеру мен шешу бойынша барлық оқу бағдарламасының мақсаты – бар білімді кеңейту және тереңдету, балалардың танымдық қызығушылығын дамыту, олардың математикалық қабілеттері мен потенциалын қалыптастыру, әртүрлі қиындықтағы тақырыптық тапсырмаларды шешудің ұғымдары мен әдістерін қалыптастыру.

Математика пәндерінің жүйесінде мектептік алгебра бағдарламасы ерекше орын алады және өз ерекшеліктеріне ие. Мысалы, 9-шы сыныптардағы алгебра бағдарламасы, әдетте, **қолданбалы және практикалық сипатқа** ие.

Оқыту барысында балалар **маңызды ақпарат пен құнды білімдерді** алады, олар математикалық аппараттың маңызды бөлігі болып табылады. Сонымен қатар, бұл білімдер **математикалық да, математикадан тыс** көптеген есептерді шешуге белсенді түрде қолданыла алады.

Дегенмен, 7–9 сыныптардағы оқыту – әр оқушының математикалық біліміндегі соңғы кезең емес, **аралық кезең** екенін түсіну маңызды. 10–11 сыныптарда математика пәнін ары қарай оқыту оқушылардың математикалық дайындығына негізделеді. Соңғы 11-сыныпта **анықталған интегралдар ұғымын** енгізеді және олардың мүмкін шешу әдістерін қарастырады.

Осыдан шығатын қорытынды: «**анықталған интегралдар**» тақырыбы өте маңызды. Оны игеру барысында **интегралдарды шешу әдістеріне** – бөлшектеп интегралдау, айнымалыны ауыстыру – ерекше назар аудару қажет.

«Оқушылардың назарын «анықталған интегралдар» тақырыбына қалай шоғырландыруға болады?» деген сұраққа біржақты жауап жоқ. Бұл, өткен материалды бекіту және тәжірибеде қолдану үшін бірнеше әдістің бір уақытта тиімді болуы мүмкіндігін түсіндіреді.

Бір тапсырманы орындағаннан кейін, мұғалім балалардан **ұқсас тапсырманы өз бетімен орындауды** сұрай алады (шешімін көрсетпей, бағыт-бағдарсыз, түсіндірмесіз).

Енді, интегралдарды шешуге арналған сабақтың мысалын талдайық, онда **анықталған интегралды орынбасу әдісімен шешу** қарастырылады.

Шешуге ұсынылған интеграл: $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$.

Шешуі. Шешу әдісі – орынбасу әдісі: $x = a\sin t$, рөлі α және β мұндағы 0 және $\frac{\pi}{2}$ мәндері $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 tdt = \frac{a^2}{2}(t + \frac{\sin 2t}{2})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}$ болып табылады.

Осы тапсырманы оқушылар **өздері орындауы тиіс**, бірақ қиындық туындаған жағдайда олар **мұғалімге сұрақ қою құқығын сақтайды**.

Енді **сәл күрделірек тапсырманы** қарастырайық: $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

Шешуі. Орынбасу $x = \pi - t$ **(мұндағы** t, π **-ден 0 дейін өзгереді) теңдікті береді:**
$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt$ немесе $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt - \int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt$

Соңғы интегралды сол жаққа көшіріп, аламыз:

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt = -\frac{\pi}{2}arctg(\cos t)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}$$

Жоғарыда берілген интегралдарды есептеу әдісі **өте қарапайым және түсінікті**. Аталған жұмыс, әдетте, **бүкіл оқу кезеңі бойы** жүргізіледі. Негізі, оқуында жақсы жетістікке жеткен балалар **сыныптан алға шығады**. Сол үшін, егер олар жаңа тапсырмаларды күтіп дезорганизацияға ұшыраса, мұғалім **оқулықтан басқа тапсырмаларды шешуге ұсынады**.

Бұл типтегі сабақтың өз кемшіліктері бар, өйткені бір сабақ барысында балалар бірнеше топқа бөлініп, **бір-бірімен әрекеттеспей қалады**. Сол кезде оқушыларда пайда болатын **жекелену сезімі** математикалық тапсырмаларды шешу кезінде маңызды болып табылатын **назар аударуды төмендетеді**.

Осындай жағдайда **сыныпты біріктірудің бірнеше нұсқасын** қолдануға болады. Мысалы, бірнеше тапсырманы бір уақытта қарастыру – бір тапсырманы түсіндіргеннен кейін, мұғалім оны тақтадан алып тастап, **сол мезетте үш тапсырманы өз бетінше орындауға ұсынады.**

Оқушылар өз тапсырмаларын орындауды жалғастырады. Бірінші орындағандар **мұғалімге кезекпен барып, тексерісінен өтіп, баға алады**.

Бұл жұмыс формасы **қарапайым емес** және мұғалімнен сыныпқа максималды назар аударуды талап етеді, бірақ оның қолданылуы оқушылар үшін маңызды – **білім және академиялық артықшылықтар береді**.

Интегралдарды танысу және шешу үшін берілген тапсырмалар тізімі әлі толық емес. Көбінесе, тапсырмалар **интегралдарды және сандар аудандарын есептеуге** бағытталған (жаттығу сипатында).

Қорытынды. Қорытындылай келе, анықталған интеграл көмегімен есептерді шешу әдістемесі математиканы оқыту үдерісінде маңызды орын алады. Зерттеу барысында анықталған интегралды оқыту тек есептеу дағдыларын қалыптастырумен шектелмей, оқушылардың логикалық ойлауын, аналитикалық қабілеттерін және зерттеушілік дағдыларын дамытуға ықпал ететіні айқындалды.

Мақалада ұсынылған тапсырмалар жүйесі (теңдеулер мен теңсіздіктерді шешу, параметрлі есептер, тізбектерді зерттеу және графиктік интерпретация) оқушылардың математикалық білімін тереңдетуге және оны практикада тиімді қолдануға мүмкіндік береді. Әсіресе, айнымалыны ауыстыру, бөлшектеп интегралдау сияқты әдістерді меңгеру оқушылардың күрделі есептерді шешу қабілетін арттырады.

Сонымен қатар, оқыту үдерісінде мотивацияны арттыру, сараланған тапсырмаларды қолдану және оқушылардың өз бетінше жұмыс істеуін ұйымдастырудың маңыздылығы атап өтілді. Бұл тәсілдер білім алушылардың пәнге деген қызығушылығын күшейтіп, олардың танымдық белсенділігін арттырады.

Осылайша, анықталған интеграл тақырыбын тиімді оқыту үшін әдістемелік тұрғыдан дұрыс ұйымдастырылған тапсырмалар жүйесін қолдану, әртүрлі оқыту әдістерін үйлестіру және оқушылардың жеке ерекшеліктерін ескеру қажет. Бұл өз кезегінде оқушылардың математикалық дайындығын сапалы деңгейге көтеруге және олардың болашақ оқуына берік негіз қалыптастыруға мүмкіндік береді.

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Фихтенгольц Григорий Михайлович
Математикалық анализ негіздері. – Мәскеу: Наука, 1980.
2. Демидович Борис Павлович
Жоғары математика есептер жинағы. – Мәскеу: Наука, 1986.
3. Бернхард Риман
Интегралдар теориясына арналған еңбектері.
4. Исаак Ньютон
Математикалық бастамалар (Principia Mathematica).
5. Готфрид Вильгельм Лейбниц
Дифференциалдық және интегралдық есептеулер негіздері.
6. математикалық анализ бойынша жоғары оқу орындарына арналған оқулықтар.
7. Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі ұсынған математика оқулықтары.
8. Электрондық ресурстар:
   - Қазақстандық білім беру порталдары
   - Онлайн математикалық анықтамалықтар
     - Ғылыми мақалалар мен оқу материалдары