ӘОЖ 519.217.1

ПУАССОНДЫҚ СТАЦИОНАР ОҚИҒАЛАР АҒЫНЫНЫҢ СИПАТТАМАЛАРЫ: ТЕОРИЯСЫ, ӘДІСТЕРІ ЖӘНЕ ҚОЛДАНЫЛУЫ

Насыров Рахметолла Русланұлы
nassyrov.r.r@mail.ru
7M05401 - «Математика және компьютерлік ғылымдар» білім бағдарламасының 1 курс магистранты
Х.Досмұхамедов атындағы Атырау университеті, Атырау қ, Қазақстан Республикасы
Ғылыми жетекшісі, тех.ғ.қ., профессор - Мырзашева Айгуль Нармаганбетовна

Қазіргі ғылым мен техникада көптеген құбылыстар кездейсоқ сипатқа ие, сондықтан оларды зерттеу мен талдау үшін Ықтималдық теориясы кеңінен қолданылады. Бұл теорияның негізгі ұғымдарының бірі – Кездейсоқ оқиға. Кездейсоқ оқиға деп белгілі бір тәжірибе нәтижесінде пайда болуы да, пайда болмауы да мүмкін, алдын ала нақты анықталмайтын, бірақ ықтималдық арқылы сипатталатын құбылысты айтамыз. Кездейсоқ оқиғалар табиғатына қарай бірнеше түрге бөлінеді. Мысалы, мүмкін (сенімді) оқиға – міндетті түрде орындалатын оқиға, ал мүмкін емес оқиға – ешқашан жүзеге аспайтын құбылыс, қарама-қарсы оқиғалар – бір-біріне қарама-қарсы нәтижелер. Сонымен қатар, тәуелсіз оқиғалар бір-біріне әсер етпейді, ал тәуелді оқиғалар бірінің пайда болуы екіншісінің ықтималдығына ықпал етеді. Бұл жіктеулер күрделі кездейсоқ процестерді түсінуге және оларды модельдеуге мүмкіндік береді. Қазіргі таңда кездейсоқ құбылыстарды зерттеу көптеген ғылыми және қолданбалы салаларда маңызды орын алады. Осындай құбылыстарды сипаттауда ықтималдық теориясының негізгі бағыттарының бірі – Пуассондық процесс болып табылады. Бұл процесс уақыт немесе кеңістік аралығында сирек және бір-бірінен тәуелсіз оқиғалардың пайда болуын модельдеуге мүмкіндік береді. Пуассондық процестер алғаш рет француз математигі Симеон Дени Пуассон (1781–1840ж.ж) еңбектерінде қарастырылып, кейіннен әртүрлі салаларда кеңінен қолданыс тапты. Атап айтқанда, олар байланыс жүйелерінде қоңыраулар ағынын модельдеу, көлік қозғалысын талдау, сақтандыру саласында тәуекелдерді бағалау, сондай-ақ физика мен биологиядағы кездейсоқ құбылыстарды зерттеу үшін пайдаланылады.

Дискретті кездейсоқ шамалардың ықтималдықтар үлестірімі

Ықтималдықтар теориясы – кездейсоқ құбылыстар заңдылығымен айналысатын математиканың саласы. Ықтималдықтар теориясында негізгі ұғымдар оқиғалар және олардың пайда болу ықтималдығы. Оқиғалар негізінде белгілі шарттар орындалғанда, жағдайлар жүзеге асқанда пайда болады. Айталық, тиынды жоғары қарай лақтырсақ, ол теп-тегіс еденге түскенде, дөңгеленіп барып не сан жағы, не герб жағы жоғары қарап түсуі мүмкін. Тиынның жерге белгілі бір жағымен түсуі үшін, ол көптеген қимыл әрекеттер жасайды, олардың жиынын сынақ (тәжірибе, эксперимент) деп атайды. Оның сан (тиын), не герб жағының жоғары қарап түсуі – оқиға болып табылады.

Сонымен, ықтималдықтар теориясының негізгі ұғымдарының бірі оқиға деп белгілі бір сынақтардың нәтижесін айтады.

Оқиғаларды латынның бас әріптері A, B, C, …, ал бұларға қарама-қарсы оқиғаларды $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, … арқылы белгілейді. Айталық, тиынның сан жағының пайда болуы A оқиғасы болса, герб жағының пайда болуы қарама-қарсы оқиға $\bar{A}$ болады және т.с.с.

Оқиғалар – кездейсоқ, ақиқат, мүмкін емес деп үшке бөлінеді. Сынақ кезінде оқиғаның пайда болуы да, немесе пайда болмауы да мүмкін оқиғаны кездейсоқ оқиға деп атайды.

Мысалы, жәшіктің ішінде ақ, қызыл, қара шар бар делік. Егер шарларды араластыра отырып, кез келген біреуін суырып алсақ, онда оның ақ немесе қара не қызыл шар болуы мүмкін. Жәшіктен белгілі бір түсті шардың, мысалы ақ шардың пайда болуы – кездейсоқ оқиға болады.

Сынақ нәтижесінде қандай да бір сандық мәнге тең болатын шаманы кездейсоқ шама деп атаймыз. Мысал үшін ойын сүйегін лақтырғанда тек 1,2,3,4,5,6 сандары түсуі мүмкін, олай болса түскен ұпай саны кездейсоқ шама, ал бұл сандар кездейсоқ шаманың мәндері.

Шама дискретті деп аталады егер оның мүмкін болатын мәндерінің арасында нақты үзілісті қадам болса.

Мысалы: Бір күн ішінде дүкенге келген клиенттер санын қарастырайық. Бұл шама тек бүтін мәндерді ғана қабылдай алады: 0, 1, 2, 3, 4, …

Мұнда мәндер арасында нақты үзіліс (қадам) бар, яғни 2 мен 3-тің арасында 2.5 сияқты мәндер болмайды. Сондықтан бұл — Дискретті кездейсоқ шама болып табылады.

Тағы бір қарапайым мысал — тиынды бірнеше рет лақтырғанда «гербтің» түсу саны. Мысалы, 5 рет лақтырсақ, нәтиже тек 0, 1, 2, 3, 4 немесе 5 болуы мүмкін. Бұл жерде де мәндер бөлек-бөлек орналасқан, араларында үзіліс бар.

Яғни, егер шама тек санаулы, бір-бірінен ажыратылған мәндерді ғана қабылдаса — ол **дискретті шама** болып табылады.

Мысалға, адамдар саны 1,2,3 т.с.с натурал сандармен есептеледі, яғни 1 мен 2 арасында «бір жарым» жоқ, өйткені «бір жарым» адам бола алмайды. Екінші мысал, IELTS тестінің нәтижелері дисретті шама болады. Өйткені оқушы 4,5 немесе 5,0 алуы мумкін, бірақ 4,002 сияқты 4,5 пен 5,0 арасында жатқан сандар ала-алмайды, яғни нақты үзіліс бар. Дискретті емес немесе үздіксіз шамаға, мысал үшін, оқушылардың бойларының ұзындықтарын алуға болады, ол 170 см немесе 171 см арасындағы кез келген ұзындыққа тең болуы мүмкін, яғни үзіліс жоқ.

Ықтималдықтар үлестірімінің қасиеті:

Х кездейсоқ шамасының әрбір мәніне сол шаманың *P(x)* ықтималдығын сәйкестендіретін графикті, кестені немесе заңдылықты ықтималдық үлестірімі деп атаймыз және оның келесі қасиеттері бар:

1. $0 \le p(x) \le 1$ – Кез-келген оқиғаның орындалу ықтималдығы теріс емес сан болады және 1 ден артық емес;

2. $\sum p(x) = 1$. Кездейсоқ оқиғалардың орындалу ықтималдықтарының қосындысы 1-ге тең.

Тәуелсіз сынақтарды қайталау. Бернулли формуласы.

Саны n рет қайталанатын қандай да бір сынақ жүргізілсін. Мұның әрқайсысында А оқиғасы пайда болуы да, болмауы да мүмкін. Соның өзінде мына шарт орындалсын: әр сынауда А оқиғасының пайда болу ықтималдығы p тұрақты, яғни ол не сынақ ретіне, не алдыңғы сынақтар нәтижесіне тәуелді емес. Бұл шарт сынақтар тізбегі тәуелсіз екендігін көрсетеді. Осы шартты қанағаттандыратын сынақтар тізбегін тәуелсіз сынақтарды қайталау схемасы немесе Бернулли схемасы деп атайды.

Мұндай қарапайым схеманы тұңғыш қарастырған – Швейцария ғалымы Я. Бернулли (1654–1705) еді. Ал сынақтарды тәуелсіз дегенде біз оқиғаның пайда болу (болмау) ықтималдығы бір сынақтан екінші сынаққа өткенде өзгермейді және оқиға басқа сынақтарда пайда болды ма, не болмады ма, оған байланысты емес деп түсінетін боламыз. Бұл келтірілген мысалдарда сынақ нәтижесі тек екі қарама-қарсы оқиғаның бірі ғана пайда болып, ал әрбір сынақта оқиғаның пайда болу ықтималдығы бірдей болады. Тәуелсіз сынақтардың мүмкіндік нәтижесі екіден артық және олардың ықтималдықтары әр түрлі болуы да мүмкін.

Теорема. Егер әрбір сынақта оқиғаның пайда болу ықтималдығы тұрақты p-ға тең болса, онда n рет тәуелсіз сынақ жүргізілгенде ол оқиғаның дәл m рет пайда болу ықтималдығы мына формуламен анықталады.

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \qquad (1)$$

Алынған формуланы Бернулли формуласы дейді. Мұндағы $p = P(A)$, $q = P(\bar{A})$ қарама-қарсы оқиғалардың ықтималдықтарының қосындысы $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ – ге тең болғандықтан $q = 1 - P(\bar{A}) = 1 - p$ болады. (1) формуланы **биномдық** деп те атайды.

Дәлелдеуі. Егер A оқиғасы n сынақтар $\underbrace{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}, A_n}_{n-\text{рет}}$ кезінде m рет пайда болып, $n-m$ рет пайда болмаса, онда тәуелсіз оқиғалардың ықтималдықтарын көбейту формуласы бойынша А оқиғасының ықтималдығы $p^m q^{n-m}$ болады. Мұндай комбинациялардың барлық саны мынаған тең болады: $C_n^m p^m q^{n-m}$, ал $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m!)}$ болғандықтан

$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ болады. Осымен теорема дәлелденді.

Мысалы. Монетаны 5-рет лақтырғанда елтаңба жағының 3 рет түсу ықтималдығы қанша?
Шешуі: Монетаны 5-рет лақтырған елтаңба жағы төмендегідей ретпен болады.

$A_1A_2A_3\bar{A}_4\bar{A}_5$	0.5·0,5· 0,5 · 0,5 · 0,5
$A_1A_2\bar{A}_3A_4\bar{A}_5$	0.5·0,5· 0,5 · 0,5 · 0,5
$A_1\bar{A}_2A_3A_4\bar{A}_5$	0.5·0,5· 0,5 · 0,5 · 0,5
$\bar{A}_1A_2A_3A_4\bar{A}_5$	0.5·0,5· 0,5 · 0,5 · 0,5
$\bar{A}_1A_2A_3\bar{A}_4A_5$	0.5·0,5· 0,5 · 0,5 · 0,5
$\bar{A}_1A_2\bar{A}_3A_4A_5$	0.5·0,5· 0,5 · 0,5 · 0,5
$\bar{A}_1\bar{A}_2A_3A_4A_5$	0.5·0,5· 0,5 · 0,5 · 0,5
$A_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4A_5$	0.5·0,5· 0,5 · 0,5 · 0,5
$A_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4A_5$	0.5·0,5· 0,5 · 0,5 · 0,5
$A_1\bar{A}_2A_3\bar{A}_4A_5$	0.5·0,5· 0,5 · 0,5 · 0,5

$$P_5(3) = P(A_1A_2A_3\bar{A}_4\bar{A}_5) + P(A_1A_2\bar{A}_3A_4\bar{A}_5) + P(A_1\bar{A}_2A_3A_4\bar{A}_5) +$$
$$+P(\bar{A}_1A_2A_3A_4\bar{A}_5) + P(\bar{A}_1A_2A_3\bar{A}_4A_5) + P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3A_4A_5) + P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3A_4A_5)$$
$$+P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4A_5) + P(A_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4A_5) + P(A_1\bar{A}_2A_3\bar{A}_4A_5) =$$
$$= 0.5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 0.5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 0.5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5$$
$$+0.5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 0.5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 0.5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5$$
$$+0.5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 0.5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 0.5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5$$
$$+0.5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 10 \cdot 0,5^5 = 0,3125$$

Мұндағы: A_1 1-ші сынақтың елтаңба болуы, $\bar{A}_1$ 1-ші сынақтың елтаңба болмауы. Монетаның елтаңба жағының түсуінің ықтималдығы 0,5 – ке тең, ал монетаның елтаңба жағының түспеуінің ықтималдығы 0,5 – ке тең.
Ал осы есепті Бернулли формуласымен есептейтін болсақ:

$$m = 3, n = 5, p = 0,5, q = 1 - p = 0,5$$
$$P_5(3) = C_5^3 \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^{5-2} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} \cdot 0.5^5 = 10 \cdot 0,5^5 = 0,3125$$

Яғни монетаны 5-рет лақтырғанда елтаңба жағының 3 рет түсу ықтималдығы 0,3125 тең.
Тәуелсіз *n* сынақтарда *A* оқиғасының *m* реттен кем пайда болатындығының ықтималдығы:

$$P_n(0) + P_n(1) + \cdots + P_n(m-1) = \sum_{i=0}^{m-1} P_n(i)$$

Тәуелсіз *n* сынақтарда *A* оқиғасының *m* реттен артық пайда болуының ықтималдығы:

$$P_n(m+1) + P_n(m+2) + \cdots + P_n(n) = \sum_{i=m+1}^{n} P_n(i)$$

Тәуелсіз *n* сынақтарда *A* оқиғасының кем дегенде m рет пайда болуының ықтималдығы:

$$P_n(m) + P_n(m+1) + \cdots + P_n(n) = \sum_{i=m}^{n} P_n(i)$$

1-мысал. Нысанаға 10 рет оқ атылды. Әрқайсысының нысанаға тию ықтималдығы $\frac{1}{3}$ –ге тең болса, онда атылған тәуелсіз 10 оқтың дәл төртеуінің нысанаға тию ықтималдығын анықтау керек.
Шешуі. Есеп шарты бойынша сынау саны n = 10. Әрбір сынаудағы оқиғаның пайда болуы ықтималдығы $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{3}$, $m = 4$.

$$P_n(m) = P_{10}(4) = C_{10}^4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^6 = 210 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^6 = 0,2276$$

2-мысал. 1-мысал шартын пайдалану арқылы $n = 10,\ p = \frac{1}{3}$ болғанда $m = 0, 1, 2, \dots, 10$ мәндеріне сәйкес ықтималдықтарды есептеп, графигін сызу керек.
Шешуі. Іздеп отырған ықтималдықтарды (1) формуласы бойынша есептейміз:

$$P_{10}(0) = C_{10}^{0}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{10} = 0{,}0173$$

$$P_{10}(1) = C_{10}^{1}\left(\frac{1}{3}\right)^{1}\left(\frac{2}{3}\right)^{9} = 0{,}0867$$

$$P_{10}(2) = C_{10}^{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{8} = 0{,}1951$$

$$P_{10}(3) = C_{10}^{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{7} = 0{,}2601$$

$$P_{10}(4) = C_{10}^{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{6} = 0{,}2276$$

$$P_{10}(5) = C_{10}^{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{5} = 0{,}1366$$

$$P_{10}(6) = C_{10}^{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{4} = 0{,}0569$$

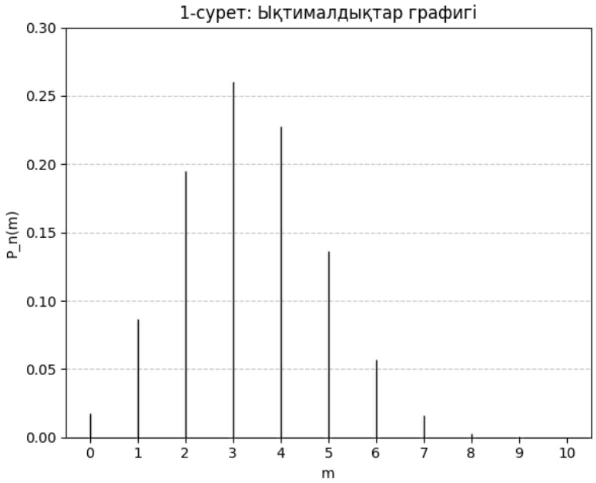
$$P_{10}(7) = C_{10}^{7}\left(\frac{1}{3}\right)^{7}\left(\frac{2}{3}\right)^{3} = 0{,}0163$$

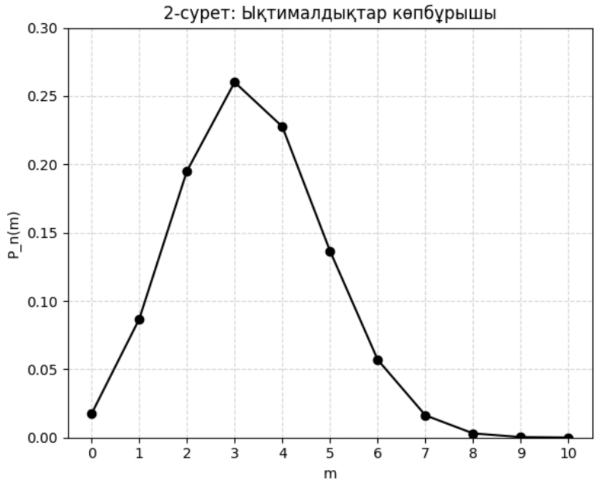
$$P_{10}(8) = C_{10}^{8}\left(\frac{1}{3}\right)^{8}\left(\frac{2}{3}\right)^{2} = 0{,}0031$$

$$P_{10}(9) = C_{10}^{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{9}\left(\frac{2}{3}\right) = 0{,}0003$$

$$P_{10}(10) = \left(\frac{1}{3}\right)^{10} = 0{,}00002$$

Ықтималдықтар мәнінің суретін салу үшін абсциссалар осіне m-нің мәндерін, ординаталар осіне $P_n(m)$ мәндерін саламыз (1-сурет). Әрбір $m = 0, 1, 2, \dots, 10$ мәндеріне сәйкес $P_n(m)$ мәндерінің ұштарын қоссақ, онда көрсетілген көпбұрыш шығады (2-сурет). Мұны ықтималдықтардың үлестірім көпбұрышы деп те атайды.





3-мысал. Нысанаға 6 рет оқ атылды. Әр атқан сайын нысанаға тию ықтималдығы 0,4-ке тең. Мына ықтималдықтарды табу керек:
а) нысанаға оқ бір рет дәл тиді;
б) нысанаға оқ тию саны 4-тен кем емес;
в) нысанаға ең болмағанда бір рет оқ тиді.
Шешуі. а) Бернулли формуласын пайдаланамыз:

$$n = 6,\ m = 1,\ p = 0{,}4,\ q = 1 - 0{,}4 = 0{,}6.$$

Сонда

$$P_6(1) = C_6^1 p^1 q^5 = 6 \cdot 0{,}4 \cdot (0{,}6)^5 = 0{,}1866.$$

б) нысанаға тиген оқ саны 4-тен кем емес оқиғасын А әрпімен белгілеп 4, 5 және 6 рет тию ықтималдықтарын есептейміз:

$$P(A) = P_6(4) + P_6(5) + P_6(6) =$$

$$= C_6^4 (0{,}4)^4 (0{,}6)^2 + C_6^5 (0{,}4)^5 \cdot 0{,}6 + C_6^6 (0{,}4)^6 =$$

$$\approx 0{,}1382 + 0{,}3686 + 0{,}0041 = 0{,}5109.$$

в) Іздеп отырған оқиға ықтималдығын $P(B)$ арқылы белгілеп, мынаны табамыз:

$$P(B) = 1 - q^6 = 1 - (0{,}6)^6 = 1 - 0{,}0467 = 0{,}9533.$$

$$P(B) = 0{,}9533$$

Ықтималдықтардың биномдық үлестірімі

«Дартс» ойынының шеңберінің үштен бір бөлігі қара түспен боялған болсын. Робот автоматты түрде «найзаны» атады. «Найза» қара түске немесе ақ түске тиюі мүмкін. Қара түске тиюінің ықтималдығы $\frac{1}{3}$ тең, ал ақ түске тиюінің ықтималдығы $\frac{2}{3}$ –ге тең. Найзаны 5 рет атты делік.

X — кездейсоқ шамасы найзаның қара түске тиюінің саны болсын. Бұл кездейсоқ шаманың ықтималдықтар үлестірімі заңдылығын анықтамас бұрын кейбір терминдерді анықтап алайық. Роботтың найзаны атуын «сынақ» деп атаймыз. Найзаның қара түске тиюін «сәтті», ал ақ түске тиюін «орындалмау» деп сипаттайық. Сонда X санын 5 рет жүргізілген сынақтағы сәттіліктер саны деп анықтауға болады.
$P(X = 0)$ дегеніміз 5 рет жүргізілген сынақтағы сәттіліктер саны 0, яғни 5 сынақтың бәрінде найза ақ түске тиюінің ықтималдығы дегенді білдіреді. C_1 — бірінші сынақтың нәтижесі «сәтті», ал O_3 — үшінші сынақтың нәтижесі «орындалмады» дегенді білдірсін. Сонда:

$$P(X = 0) = P(O_1 O_2 O_3 O_4 O_5) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243},$$

$$P(X=1)=P(C_1O_2O_3O_4O_5)+P(O_1C_2O_3O_4O_5)+P(O_1O_2C_3O_4O_5)+$$

$$+P(O_1O_2O_3C_4O_5)+P(O_1O_2O_3O_4C_5)+$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+$$

$$+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{80}{243},$$

$$P(X=2)=P(C_1C_2O_3O_4O_5)+P(O_1C_2C_3O_4O_5)+P(O_1O_2C_3C_4O_5)+$$

$$+P(O_1O_2O_3C_4C_5)+\cdots+P(C_1O_2O_3O_4C_5)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+$$

$$+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=$$

$$=10\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=C_5^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{80}{243}$$

Мұнда, комбинаториканың $C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$ формуласын қолданып комбинациялар санын есептеуге болады. Сонымен барлығын бір кестеге жазатын болсақ:

x	$P(X=x)$	Формула түрінде	Сан мәні
0	$\left(\frac{2}{3}\right)^5$	$C_5^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^5$	$\frac{32}{243}$
1	$5\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^4$	$C_5^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^4$	$\frac{80}{243}$
2	$10\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3$	$C_5^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3$	$\frac{80}{243}$
3	$10\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2$	$C_5^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2$	$\frac{40}{243}$
4	$5\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^1$	$C_5^4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^1$	$\frac{10}{243}$
5	$\left(\frac{1}{3}\right)^5$	$C_5^5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^0$	$\frac{1}{243}$

Байқасаңыздар, ықтималдық үлестірімінің қасиеті орындалып тұр:

$$\sum_{x=0}^{5}P(X=x)=1.$$

Бұл ықтималдық үлестірімінің ықтималдықтарын есептеудің жалпы ережесі:

$$P(X=x)=C_5^x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{5-x},\quad x=0,1,2\ldots5$$

Қорытындылай келе, сынақта «сәтті» нәтиженің санына тең *X* кездейсоқ шамасының ықтималдық үлестірімі Биномдық ықтималдық үлестірімі деп аталады. (binom- екі деген мағынаны білдіреді, яғни сынақтың екі ғана мүмкін мәні бар, олар сынақ «сәтті» немесе «орындалмады»).

Биномдық ықтималдық үлестірімін қолдану үшін сынақта келесі шарттар орындалу керек:

1. Сынақта тек 2 мүмкін нәтиже бар(сынақ «сәтті» немесе «орындалмады»);
2. Сынақтар саны шектеулі (n);
3. Әрбір сынақ нәтижесі бір-біріне тәуелсіз;
4. Сынақтың «сәтті» болуының ықтималдығы тұрақты сан.

$P(X=x)=C_n^x \cdot p^x(1-p)^{n-x}, \quad x=0,1,2 \ldots n$ – Бернулли формуласы

Сонымен биномдық үлестірім ықтималдықтары Бернулли формуласымен есептеледі. Мұндағы n және p сандары биномдық үлестірімнің параметрлері деп аталады. Ықтималдықтарды есептеу үшін сіздерге тек осы екі параметрді білу жеткілікті. X кездейсоқ шамасы параметрлері n және p болатын биномдық үлестірімге бағынатынын қысқаша $X \sim B(n,p)$ деп белгілейді.
$B(n,p)$ биномдық үлестірімі үшін ықтималдылық $P_r=\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}$ Бернулли формуласымен, ал математикалық күтім $E(X)=\mu=np$ формуласымен, дисперсия (ауытқуы) $\mathrm{Var}(X)=\sigma^2=np(1-p)$ формуласымен есептеледі.

Ықтималдықтардың Пуассон үлестірімі

Дискретті ықтималдықтар үлестірімнің келесі түрі - Пуассон үлестірімі. Пуассон үлестірімі практикалық есептерді шешуде өте пайдалы. Бірақ Биномдық үлестірім мен Пуассон үлестірімінің негізгі айырмашылығы – Пуассон үлестірімі шексіз, яғни сынақтар саны шектелмеген. Пуассон үлестірімін қолданудың шарттары келесідей:
1. Оқиғалар кездейсоқ және бір-біріне тәуелсіз болуы қажет, мысал үшін тас жолдағы автокөліктер саны кездейсоқ, өйткені қандай да бір уақытта көліктердің саны кездейсоқ (10 көлік болуы мүмкін немесе 70 көлік, немесе көлік мүлдем болмауы да мүмкін) және бір-біріне тәуелсіз (10 көліктің болуы келесі сәтте қандай да бір көлік санына әсер етпейді)
2. Орташа мәні пропорционалды заңдылыққа бағынуы қажет, мысал үшін перзентханада күніне орта есепен 5 сәби дүниеге келетіні белгілі болса, онда 30 күн ішіндегі дүниеге келетін сәбилер саны $5 \cdot 30 = 150$ деп есептей алуымыз қажет.
Пуассон үлестіріміне бағынатын практикалық есептер өте көп, солардың кейбіреулері:
1. Кездейсоқ алынған бір күнде жедел жәрдемге телефон соғулардың саны
2. Қандай да бір уақыт аралығында радиоактивті ыдыраудағы молекулалар саны
3. Кездейсоқ алынған 10 минут уақыт аралығында жолдан өткен машиналар саны
4. Бір ай уақыт аралығында болған авариялар саны
5. Бірнеше мыңдаған беттен тұратын құжаттың кездейсоқ алынған бетіндегі қателер саны
Пуассон үлестірімін қолдану үшін сынақта келесі шарттар орындалу керек:
1. Оқиғалар кездейсоқ және бір-біріне тәуелсіз;
2. Орташа мәні пропорционалды заңдылыққа бағынуы қажет
Пуассон үлестіріміне бағынатын процестердің ықтималдығын Пуассон формуласымен есептейміз:

$$P(X=x)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \quad e \approx 2{,}71828 \text{ – Пуассон формуласы}$$

Мұндағы λ саны үлестірімнің параметрі деп аталады. Ықтималдықтарды есептеу үшін сіздерге осы параметрді білу жеткілікті. X кездейсоқ шамасы параметрі λ болатын Пуассон үлестіріміне бағынатынын қысқаша

$$X \sim Po(\lambda)$$

деп белгілейді.
Пуассон үлестірімінің орташа мәні мен математикалық күтімі және ауытқуы λ-ға тең. Бұл сан Пуассон үлестірімінің жалғыз ғана параметрі сондықтан Пуассон үлестірімін келесідей белгілейді:

$$Po(\lambda) \text{ және } P_x=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

$$E(X)=\mu=\lambda, \quad Var(X)=\sigma^2=\lambda$$

Мұндағы λ — орташа мән, яғни қандай да бір оқиғаның шектелген уақытта орындалуының орташа мәні.

1-ші мысал: $X \sim Po(2)$ берілген. Келесі ықтималдықтарды табыңыздар:
а) $P(X = 1)$, ә) $P(X = 4)$, б) $P(X \geq 2)$.
Шешуі: Бұл есепте орташа мән $\lambda = 2$

а) $P(X = 1) = e^{-2}\frac{2^1}{1!} \approx 0{,}271$

ә) $P(X = 4) = e^{-2}\frac{2^4}{4!} \approx 0{,}0902$

б) $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \big(P(X = 0) + P(X = 1)\big) =$

$$= 1 - \left(e^{-2}\frac{2^0}{0!} + e^{-2}\frac{2^1}{1!}\right) \approx 1 - (0.135 + 0.271) = 0.594$$

2 – ші мысал – кестені қолдану: Өздеріңіз байқағандай Пуассон формуласын қолданып есептеу инженерлік калькуляторды қажет етеді, яғни оңай емес, сондықтан дайын Пуассон үлестірімінің жиынтық кестесі бар, осы мысалда кестені қолданып ықтималдықтарды табуды қарастырайық.

X кездейсоқ шамасы Пуассон үлестірімімен сипатталады және орташа мәні 1,8-ге тең.
Табу керек: а) $P(X \leq 4)$ ә) $P(X \geq 6)$
Шешуі: а) Кестеден бірден ықтималдықты оңай табамыз, ол үшін $X = 4$ жолы мен $\lambda = 1{,}8$ қатарларында тұрған санды аламыз:
$P(X \leq 4) = 0{,}9636.$

λ	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90
x = 0	0.3679	0.3329	0.3012	0.2725	0.2466	0.2231	0.2019	0.1827	0.1653	0.1496
1	0.7358	0.6990	0.6626	0.6268	0.5918	0.5578	0.5249	0.4932	0.4628	0.4337
2	0.9197	0.9004	0.8795	0.8571	0.8335	0.8088	0.7834	0.7572	0.7306	0.7037
3	0.9810	0.9743	0.9662	0.9569	0.9463	0.9344	0.9212	0.9068	0.8913	0.8747
4	0.9963	0.9946	0.9923	0.9893	0.9857	0.9814	0.9763	0.9704	0.9636	0.9559
5	0.9994	0.9990	0.9985	0.9978	0.9968	0.9955	0.9940	0.9920	0.9896	0.9868
6	0.9999	0.9999	0.9997	0.9996	0.9994	0.9991	0.9987	0.9981	0.9974	0.9966
7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9994	0.9992
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

ә) $P(X \geq 6) = 1 - P(X < 6) = 1 - P(X \leq 5)$ ал $P(X \leq 5)$ ықтималдығының мәнін кестеден оңай табамыз, ол үшін $X = 5$ жолы мен $\lambda = 1{,}8$ қатарларында тұрған санды аламыз: $P(X \leq 5) = 0{,}9896$.
Сонымен $P(X \geq 6) = 1 - P(X < 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - 0{,}9896 = 0{,}0104$
Кестені қолданғанда теңсіздіктің белгісіне үлкен мән беру керек. λ- мәні кестеде жоқ болған жағдайда калькулятор көмегімен есептеу қажет.

Биномдық үлестірімді есептеуде Пуассон үлестіріммен жуықтауды қолдану

Теорема: A оқиғасының әрбір сынақта пайда болу ықтималдығы λ/n болса (λ — тұрақты және n -нен тәуелсіз), онда өзара тәуелсіз n сынақтан құрылған A оқиғасының дәл m рет пайда болу ықтималдығы мына теңбе-теңдікті қанағаттандырады:

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \quad \lambda = np.$$

Алынған формуланы Пуассон формуласы дейді.

Дәлелдеуі: $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ Бернулли формуласындағы p мен q орнына сәйкес λ/n және $1-(\lambda/n)$ мәндерін қоямыз, сонда

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^m\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m}$$

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^m}$$

Бұл теңдіктің оң және сол бөлігінен n -ді шексіздікке ұмтылдырып, шек аламыз. Тамаша шек теоремасы бойынша:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right]^{-\lambda} = e^{-\lambda}.$$

Шектің қасиеттері бойынша:

$$\lim_{n\to\infty} 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{n}\right) = 1$$

m - тұрақты болғандықтан

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^m = \lim_{n\to\infty} P_n\,(m) = P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$$

Теорема дәлелденді. Бұл теңдіктің оң жағын $P(m;\lambda)$ арқылы белгілейік, сонда:

$$P(m;\lambda) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$$

Сөйтіп, бұл асимптотикалық формула өте сирек пайда болатын оқиғаларға тән заң және сондай жағдайларды сипаттайтын математикалық модель.

1-мысал. Ұшып бара жатқан ұшаққа оқты бір атқанда тигізудің ықтималдығы $p = 0{,}01$ – ге тең, оқтың 100 рет атқанда дәл екеуінің ұшаққа тию ықтималдығын анықтау керек.
Ш е ш у і. Есептің шарты бойынша: $n = 100, p = 0{,}01, m = 2$. λ – ны табамыз $\lambda = np = 100 \cdot 0{,}01 = 1$.
Іздеген ықтималдықты Пуассон формуласы бойынша табамыз:

$$P_n(m) = P(m,\lambda) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}P(m;\lambda) = P(2;1) = \frac{1^2\cdot e^{-1}}{2!} \approx 0{,}184.$$

2-мысал. Факультетте 1825 студент оқиды. Бірінші қыркүйекте төрт студенттің бір уақытта туған күні болу ықтималдығын анықтау керек.
Ш е ш у і. 1 қыркүйекте студенттің туған күні болу ықтималдығы мынаған тең $p = \frac{1}{365}$, $n = 1825$. $\lambda = np = 1825\cdot\frac{1}{365} = 5$.
Пуассон формуласы бойынша:

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}P_4(5) = 0{,}1755.$$

Ескерту: Соңғы формулада $P_m(\lambda)$ немесе $P_n(m)$ белгіленуіне сәйкес $P_4(5)$ деп жазылған, бұл $\lambda = 5$ және $m = 4$ болғандағы мән.

Қорытынды. Пуассон теоремасының мәні мақалада Бернулли схемасынан Пуассон формуласына көшу процесі егжей-тегжейлі қарастырылған. Негізгі идея: егер сынақтар саны n өте үлкен болып ($n \to \infty$) , ал оқиғаның пайда болу ықтималдығы p өте аз болса ($p \to 0$), онда биномдық үлестірім Пуассон үлестіріміне жуықталады.

Математикалық дәлелдеу Пуассон формуласын ($P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$) шығару үшін келесі қадамдарды көрсеттім: $\lambda = np$ тұрақты параметрін енгізу. Шексіздікке ұмтылғандағы ($n \to \infty$) «тамаша шек» қасиеттерін қолдану. Факториалдар мен дәрежелерді асимптотикалық түрде ықшамдау.

Практикалық есептер Теориялық бөлімді бекіту үшін екі нақты мысал келтірілген: Техникалық есеп: Ұшаққа оқ тию ықтималдығы төмен болған жағдайда (сирек оқиға), белгілі бір мөлшерде оқ тиюінің нақты мүмкіндігін есептеу. Әлеуметтік есеп: Үлкен топтағы (1825 студент) адамдардың туған күндерінің сәйкес келу ықтималдығын анықтау.

Негізгі түйін мақаланың басты қорытындысы — Пуассон заңы «сирек оқиғалар заңы» ретінде сипатталады. Ол n үлкен және p кіші болғанда күрделі комбинаторикалық есептеулерді айтарлықтай жеңілдетіп, жоғары дәлдікпен нәтиже беретін тиімді математикалық модель болып табылады.