

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Люшненко Александр Владимирович

avlush@inbox.ru

студент 4 курса образовательной программы «6В05401 – Прикладное математическое моделирование», Атырауский университет имени Х. Досмухамедова,  
г. Атырау, Республика Казахстан

Научный руководитель — кандидат физико-математических наук, профессор Абирова А.К.

**Аннотация.** В статье рассматриваются вопросы численного исследования устойчивости нелинейной системы дифференциальных уравнений. Приводится анализ поведения решений системы в зависимости от начальных условий и параметров модели. Для исследования используются современные численные методы, позволяющие оценить устойчивость равновесных состояний и выявить возможные режимы динамики системы. Полученные результаты демонстрируют эффективность численных подходов при изучении сложных нелинейных процессов и могут быть применены в различных областях прикладной математики и физики.

**Ключевые слова:** нелинейная система, дифференциальные уравнения, устойчивость, численные методы, динамические системы, равновесие.

**Аңдатпа.** Мақалада сызықтық емес дифференциалдық теңдеулер жүйесінің тұрақтылығын сандық зерттеу мәселелері қарастырылады. Жүйе шешімдерінің бастапқы шарттар мен параметрлерге тәуелділігі талданады. Зерттеу барысында тепе-теңдік күйлерінің тұрақтылығын бағалауға және жүйе динамикасының әртүрлі режимдерін анықтауға мүмкіндік беретін заманауи сандық әдістер қолданылады. Алынған нәтижелер сызықтық емес процестерді зерттеуде сандық тәсілдердің тиімділігін көрсетеді және қолданбалы математика мен физиканың әртүрлі салаларында қолданылуы мүмкін.

**Түйінді сөздер:** сызықтық емес жүйе, дифференциалдық теңдеулер, тұрақтылық, сандық әдістер, динамикалық жүйелер, тепе-теңдік.

**Abstract.** This paper presents a numerical study of the stability of a nonlinear system of differential equations. The behavior of the system solutions is analyzed depending on initial conditions and model parameters. Modern numerical methods are employed to assess the stability of equilibrium states and to identify possible dynamic regimes of the system. The results demonstrate the effectiveness of numerical approaches in studying complex nonlinear processes and can be applied in various fields of applied mathematics and physics.

**Keywords:** nonlinear system, differential equations, stability, numerical methods, dynamical systems, equilibrium.

**Введение.** Постановка модели; Для практического исследования устойчивости рассмотрим нелинейную автономную систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + x^4 - y^2 \\ \dot{y} = 2x - y + y^4 - x^2 \end{cases} \quad (1)$$

Чтобы подтвердить результаты аналитического подхода устойчивости равновесных точек системы (1) проведём численное моделирование. Численные расчеты проведём с помощью методов Эйлера и Рунге – Кутты четвертого порядка. Исследование будет проводиться по двум равновесным точкам:  $A = (0, 0)$  для которой аналитическое исследование показало отсутствие устойчивости, и  $D = (-1,07, -1,20)$ , которая классифицирована была как устойчивый узел.

Начнем с метода Эйлера. Метод Эйлера является простейшим численным методом решения задачи Коши. Для системы (1) преобразуем расчетные формулы, которые примут вид:

$$x_{n+1} = x_n + h(x_n - y_n + x_n^4 - y_n^2) \quad (2)$$

$$y_{n+1} = y_n + h(2x_n - y_n + y_n^4 - x_n^2) \quad (3)$$

где  $h$  – шаг интегрирования. В расчетах примем  $h = 0,1$  и  $0 \leq t \leq 1$ .

Численный эксперимент для точки  $A(0, 0)$ . Возьмем близкие к началу координат начальные условия:  $x(0) = 0,05$ ,  $y(0) = 0$ . Выполним первый шаг метода Эйлера:  $f_1(x_0, y_0) = 0,05 - 0 + (0,05)^4 - 0^2 = 0,05000625$ ,

а для второй

$$f_2(x_0, y_0) = 2 \cdot (0,05) - 0 + 0^4 - (0,05)^2 = 0,0975.$$

Подставим в формулы (2) - (3), в результате вычислений получим:  $x_1 = 0,05 + 0,1 \cdot (0,05000625) \approx 0,0550$ ,  $y_1 = 0 + 0,1 \cdot (0,0975) \approx 0,00975$ . Итак,  $x_1 = 0,0550$  и

$y_1 = 0,00975$ . Имея  $x_1$  и  $y_1$  можно выполнить дальнейшее вычисление следующих значений.

Так следующая операция примет вид:

$$x_2 = x_1 + h(x_1 - y_1 + x_1^4 - y_1^2) = 0,0550 + 0,1 \cdot (0,0550 - 0,00975 + (0,0550)^4 - (0,00975)^2) \approx 0,059517,$$

$$y_2 = y_1 + h(2x_1 - y_1 + y_1^4 - x_1^2) = 0,00975 + 0,1 \cdot (2 \cdot 0,0550 - 0,00975 + (0,00975)^4 - (0,0550)^2) \approx 0,019473.$$

Получили  $x_2 = 0,059517$  и  $y_2 = 0,019473$ .

Для третьего получим:

$$x_3 = x_2 + h(x_2 - y_2 + x_2^4 - y_2^2) = 0,059517 + 0,1 \cdot (0,059517 - 0,019473 + (0,059517)^4 - (0,019473)^2) \approx 0,063485,$$

$$y_3 = y_2 + h(2x_2 - y_2 + y_2^4 - x_2^2) = 0,019473 + 0,1 \cdot (2 \cdot (0,059517) - 0,019473 + (0,019473)^4 - (0,059517)^2) = 0,029075$$

Процесс вычисления последующих значений будет аналогичен. Чтобы избежать трудоемких ручных расчетов большого объема данных, задействуем программу MATLAB, для которой используем специальный код (скрипт) для вычисления всех необходимых значений. Найденные значения визуализируем в виде таблицы. Код, используемый для упрощения вычислений, доступен в приложении.

Таблица – Результаты численного решения методом Эйлера в окрестности точки  $A(0, 0)$ .

n	t	$x_n$	$y_n$
0	0	0,05	0
1	0,1	0,055001	0,00975
2	0,2	0,059517	0,019473
3	0,3	0,063485	0,029075
4	0,4	0,066843	0,038461
5	0,5	0,069535	0,047537
6	0,6	0,071511	0,056207
7	0,7	0,072729	0,064379
8	0,8	0,073152	0,071959
9	0,9	0,072756	0,078861
10	1	0,071527	0,085001

Как видно из таблицы 1, обобщающей численные результаты данного метода, даже когда начальные условия очень близки к равновесной точке  $A(0, 0)$ , значения  $x_n$  и  $y_n$  к нулю не стремятся. Противоположно ожидаемому, траектория демонстрирует удаление от начала координат, что отражает отсутствие устойчивости.

Рассмотрим вторую равновесную точку,  $D(-1,07, -1,20)$  представляющую особый интерес с точки зрения устойчивости. По результатам аналитического исследования, данная точка была классифицирована как устойчивый узел. Поэтому применение численных методов позволяет проверить, стремятся ли траектории системы к этому равновесному состоянию. Для исследования поведения решений в окрестности данной точки выберем начальные условия близкие к данной точке:  $x(0) = -1$ ,  $y(0) = -1,10$ . Шаг интегрирования примем таким же, как и для предыдущей точки  $h = 0,1$ . Формулы для вычисления остаются такими же, т. е. формулы (2) и (3).

Первый шаг вычислений:  $x_1 = -1 + 0,1 \cdot (-1 - 1,10) + (-1)^4 - 1,102 = -1,011$ ,  
 $y_1 = -1,10 + 0,1 \cdot (2 \cdot (-1) - (-1,10) + (-1,10)^4 - (-1)^2) = -1,1436$ .  
 Итак, имеем  $x_1 = -1,011$  и  $y_1 \approx -1,1436$ .

Теперь используя эти значения, найдем следующие  
 $x_2 = -1,011 + 0,1 \cdot (-1,011 - (-1,1436) + (-1,011)^4 - (-1,1436)^2) \approx -1,024$ ,  
 $y_2 = -1,1436 + 0,1 \cdot (2 \cdot (-1,011) - (-1,1436) + (-1,1436)^4 - (-1,011)^2) \approx -1,1626$ .

Для выполнения последующих вычислений использовалась программа MATLAB. При этом применялся тот же алгоритм (код) метода Эйлера, что и для предыдущей точки, с изменением только начальных условий. Изобразим полученные результаты в таблице.

Таблица 2. - Результаты численного решения методом Эйлера в окрестности точки  $D(-1,07, -1,20)$ .

n	t	$x_n$	$y_n$
0	0	-1	-1,10
1	0,1	-1,011	-1,1436
2	0,2	-1,024	-1,1626
3	0,3	-1,0354	-1,1733
4	0,4	-1,0443	-1,1807
5	0,5	-1,0512	-1,1862
6	0,6	-1,0563	-1,1903
7	0,7	-1,0601	-1,1934
8	0,8	-1,0629	-1,1956
9	0,9	-1,0649	-1,1973
10	1	-1,0664	-1,1985

Анализируя полученные результаты изображенных в таблице, приходим к выводу, что при начальных условиях, выбранных в окрестности точки  $D(-1,07, -1,20)$ , значения  $x_n$  и  $y_n$  постепенно приближаются к координатам равновесной точки. Это означает, что траектория решения стремится к равновесной точке D. Соответственно, данный эксперимент подтверждает, что данная равновесная точка является асимптотически устойчивой. Итоговый результат полностью совпадает с ранее полученной классификацией этой точки как устойчивого узла (стока).

Для повышения точности численного исследования системы (1) в окрестности точки  $A(0, 0)$  применим метод Рунге-Кутты. В качестве начальных условий и шага интегрирования оставим такими же, которые использовали при методе Эйлера, т. е.

$x(0) = 0,05, y(0) = 0$  и  $h = 0,1$ .

Также преобразуем расчетные формулы для системы (1), у которой

$$f_1(x, y) = x - y + x^4 - y^2 \text{ и } f_2(x, y) = 2x - y + y^4 - x^2.$$

$$k_1 = hf_1(x_n, y_n), l_1 = hf_2(x_n, y_n) \quad (4).$$

$$k_2 = hf_1(x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{l_1}{2}), l_2 = hf_2(x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{l_1}{2}) \quad (5).$$

$$k_3 = hf_1(x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{l_2}{2}), l_3 = hf_2(x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{l_2}{2}) \quad (6).$$

$$k_4 = hf_1(x_n + k_3, y_n + l_3), l_4 = hf_2(x_n + k_3, y_n + l_3) \quad (7)$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \quad (8)$$

Пример ручного вычисления коэффициентов при:

$$x(0) = 0,05, y(0) = 0 \text{ и } h = 0,1.$$

$$\text{Тогда } k_1 = 0,01 \cdot f_1(0,05, 0) = 0,01 \cdot (0,05 - 0 + (0,05)^4 - 0^2) = 0,005000625,$$

$$l_1 = 0,01 \cdot f_2(0,05, 0) = 0,01 \cdot (2 \cdot (0,05) - 0 + 0^4 - (0,05)^2) = 0,00975.$$

Подставляя поэтапно от первого ко второму коэффициенту и так далее до четвертого, потом все коэффициенты подставить в формулу (7) – (8) получим  $x_1 \approx 0,0547528$ .

Используя специальный код (скрипт), вычислим все значения методом Рунге-Кутты через MATLAB и изобразим в виде таблицы. Использованный код также будет прикреплен в приложении.

Таблица 3 – Результаты численного решения методом Рунге-Кутты для точки А (0,0).

n	t	$x_n$	$y_n$
0	0	0,05	0
1	0,1	0,054753	0,009722
2	0,2	0,058969	0,019326
3	0,3	0,062591	0,028718
4	0,4	0,065565	0,037804
5	0,5	0,067846	0,046493
6	0,6	0,069396	0,054695
7	0,7	0,070185	0,062323
8	0,8	0,070192	0,069296
9	0,9	0,069407	0,075535
10	1	0,067831	0,080972

Результаты численного моделирования методом Рунге-Кутты, показывают, что при начальных условиях, близких к точке А (0,0). Видно, что значения  $x_n$  и  $y_n$  к нулю не стремятся. Следовательно численный эксперимент подтверждает, что точка А (0,0) не является устойчивой. Полученный результат совпадает с аналитическим исследованием и численным результатом метода Эйлера.

Для подтверждения устойчивости равновесной точки D (-1,07, -1,20), также применим метод Рунге-Кутты. Для этого метода оставим начальные условия и шаг интегрирования, как в методе Эйлера, т. е.  $x(0) = -1, y(0) = -1,10$  и  $h = 0,1$ . Коэффициенты для ручного вычисления также используются по формулам (5), (6) и (7).

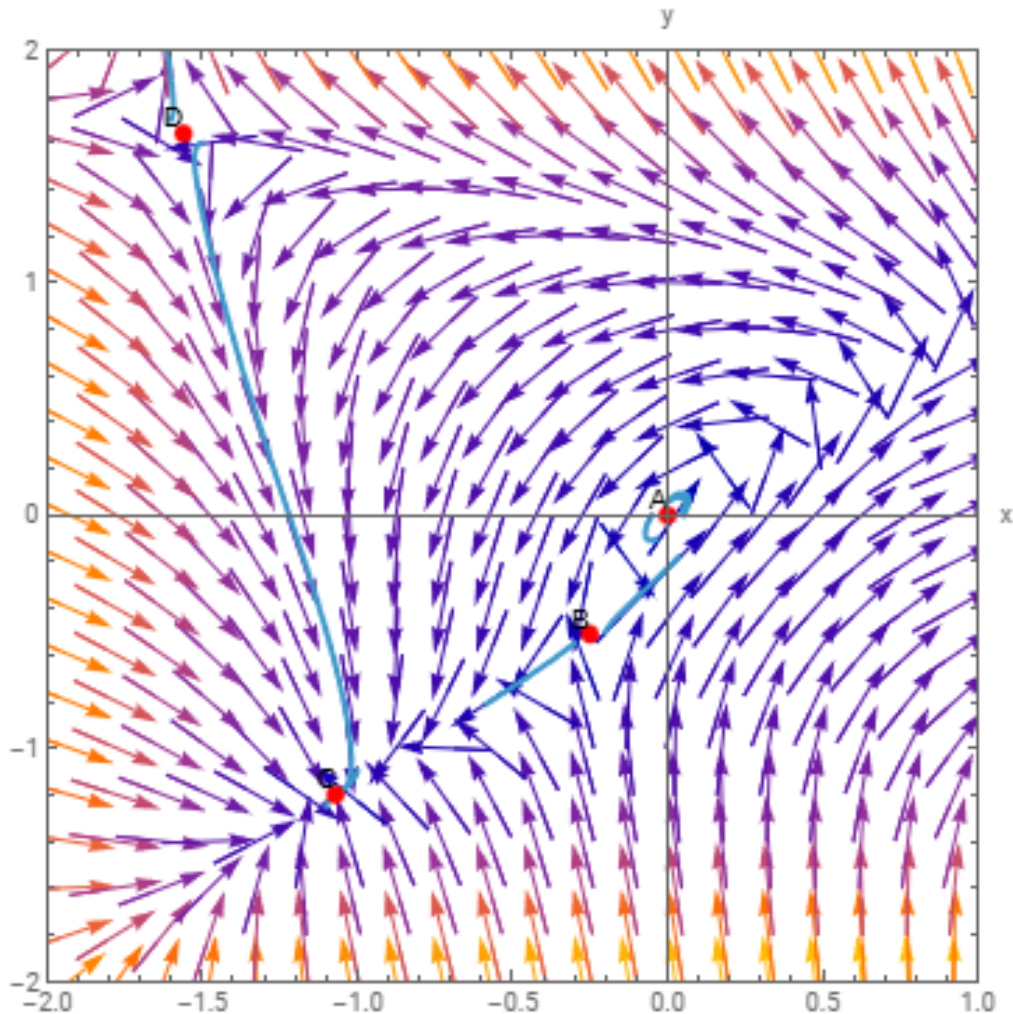
Используя код (скрипт), как и для предыдущей точки, предварительно изменив начальные условия, вычислим все значения данным методом в программе MATLAB. Полученные результаты представим в таблице.

Таблица 4 - Результаты численного решения методом Рунге-Кутты для точки  $D(-1,07, -1,20)$ .

n	t	$x_n$	$y_n$
0	0	-1	-1,10
1	0,1	-1,0115	-1,1338
2	0,2	-1,0228	-1,1544
3	0,3	-1,0327	-1,1675
4	0,4	-1,041	-1,1764
5	0,5	-1,0476	-1,1827
6	0,6	-1,0529	-1,1873
7	0,7	-1,057	-1,1908
8	0,8	-1,0601	-1,1934
9	0,9	-1,0626	-1,1953
10	1	-1,0644	-1,1969

Численное моделирование, выполненное для начальных условий, расположенных в непосредственной близости от равновесной точки  $D$ , было выявлено, что значения  $x_n$  и  $y_n$  постепенно приближаются к её координатам. Это свидетельствует о том, что траектория решения системы направлена к точке  $D$ , что, в свою очередь, подтверждает её асимптотическую устойчивость. Полученные данные полностью согласуются с результатами, ранее выведенными из анализа собственных значений матрицы Якоби, численного решения, полученного методом Эйлера.

## Общий фазовый портрет системы



**Заключение.** Проведённое исследование позволило всесторонне проанализировать равновесные состояния рассматриваемой нелинейной системы дифференциальных уравнений. Численные методы Эйлера и Рунге–Кутты и дополненное построение фазового портрета, обеспечивает взаимную верификацию полученных результатов и подтверждает их согласованность. Установленная асимптотическая устойчивость одной из точек равновесия и седловой характер двух других дают представление о структуре фазового пространства системы и её динамическом поведении. В то же время особый интерес представляет точка А, требующая более глубокого анализа, который может быть связан с применением более тонких методов исследования устойчивости или уточнением модели. Дальнейшие исследования в этом направлении позволят получить более полное понимание динамики системы и расширить область применения полученных результатов.

### Список использованной литературы

1. Филиппов А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений: Учебник. Изд. 2-е, испр. М.: КомКнига, 2007. — 240 с.
2. Edwards C. H. Differential equations and boundary value problems : computing and modeling / С. Н. Edwards, D. E. Penney, D. Calvis. — 6-е изд. — Hoboken, NJ : Pearson, 2023
3. Чарльз Генри Эдвардс, Дэвид Э. Пенни. Дифференциальные уравнения и краевые задачи: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB. 3-е издание. Киев.: Диалектика-Вильямс, 2008. ISBN 978-5-8459-1166-7
4. Степанов, В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — Москва : Физматгиз, 1959.

5. Бойков И. В. Устойчивость решений дифференциальных уравнений : монография / И. В. Бойков. — Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2008. — 244 с.

6. Родина Л. И. Применение дифференциальных уравнений для решения прикладных задач [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Л. И. Родина, А. В. Егорова ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. — Владимир : Изд-во ВлГУ, 2022.